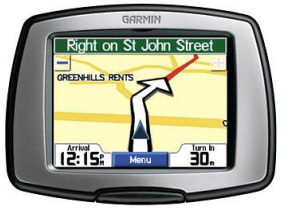
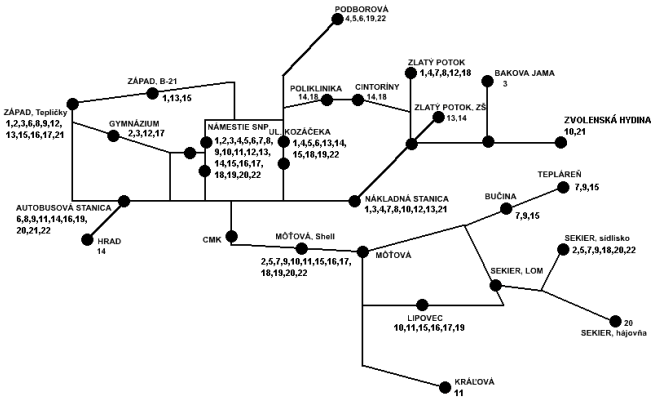
8. prednáška (13.4.2026)



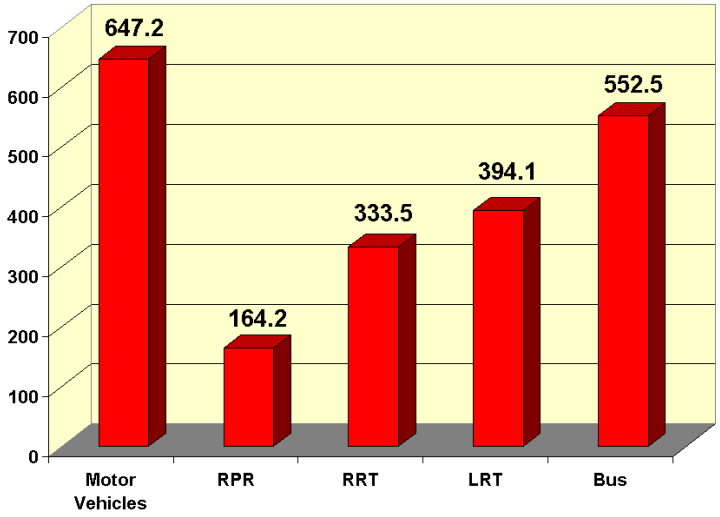
Grafy a grafové algoritmy



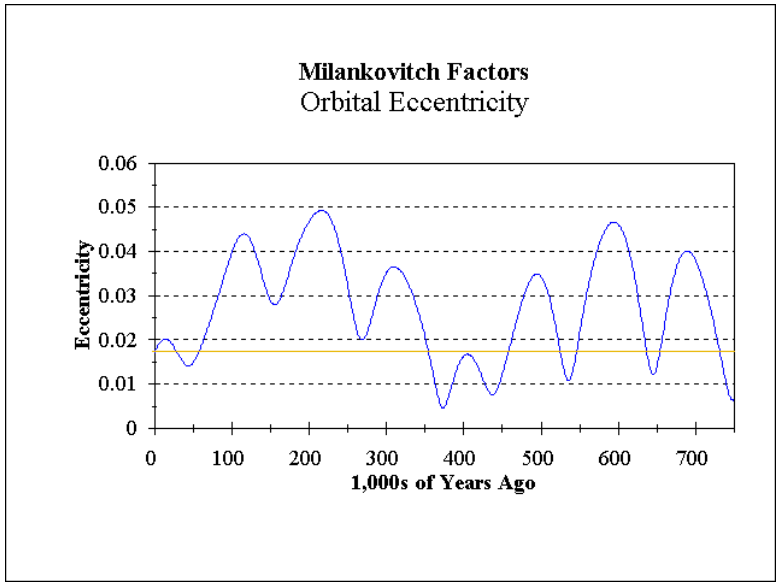
alebo

Graphs are everywhere

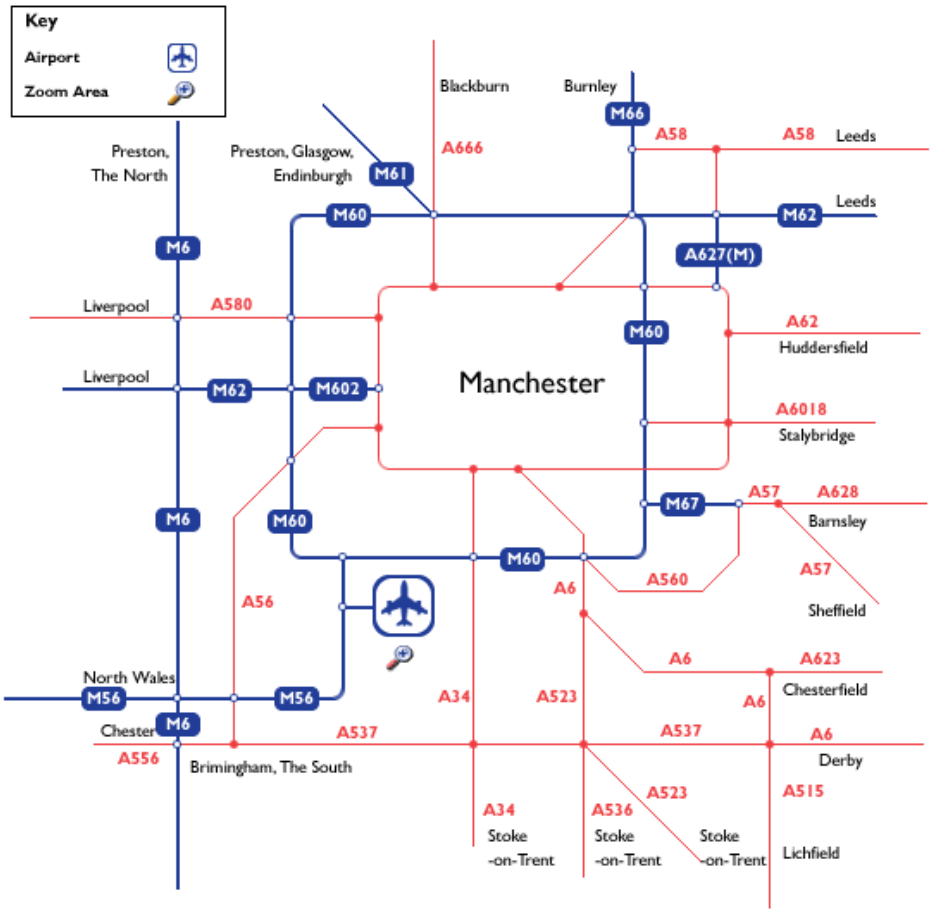
Čo nie sú grafy ...



Takto vnímajú pojem **graf** bežní ľudia ...



Graphs are everywhere!



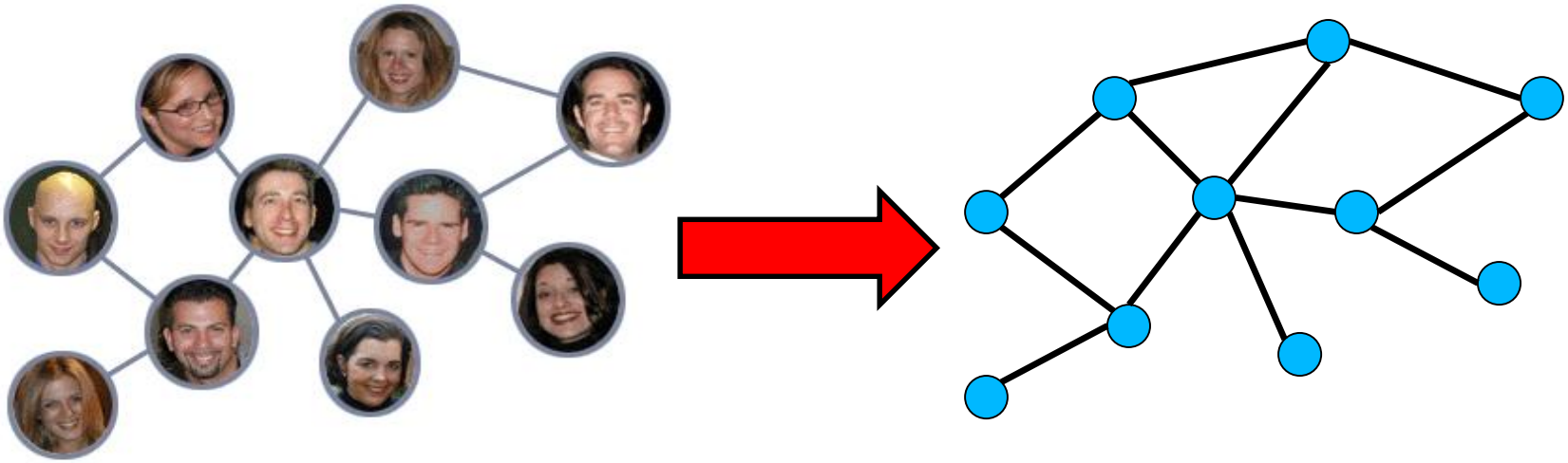
Takto vnímajú pojem **graf** informatici a matematici

Grafy ...

- Svet okolo nás je plný vzťahov – binárnych **relácií medzi objektmi**

- Príklady:
  - **objekt:** človek, **relácia**: poznať sa
  - **objekt**: mesto, **relácia**: byť spojený priamou cestou
  - **objekty**: osoby a mestá, **relácia**: bývať v meste
    - relácia je iba medzi objektmi rôzneho typu (osoba-mesto, nie osoba-osoba alebo mesto-mesto)
  - **objekty**: študenti a prednášky, **relácia**: študent sa zúčastnil prednášky

Zovšeobecnenie relácií ...

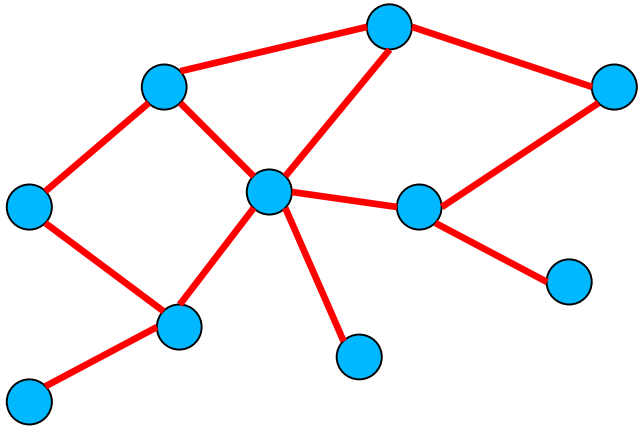


Graf = krúžky a čiary (alebo krúžky a šípky)

Grafy – formálnejšie

- **Grafom** G nazývame dvojicu (V, E), kde:
  - V je množina **vrcholov grafu** (krúžky)
  - E ($E \subseteq V \times V$) je množina **hrán grafu** (čiary, resp. šípky)

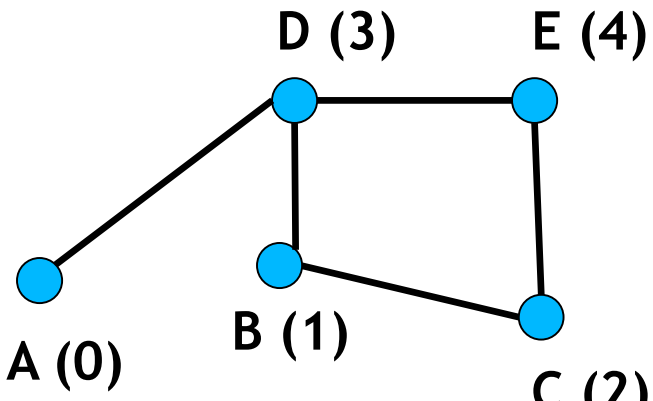
vrchol vertex
hrana edge



- Príklady:
  - vrcholy = mestá, hrany = priame cesty medzi mestami
  - vrcholy = používatelia Facebook-u, hrany = priateľstvo medzi používateľmi FB

Ako uložiť graf v programe?

Matica susednosti:



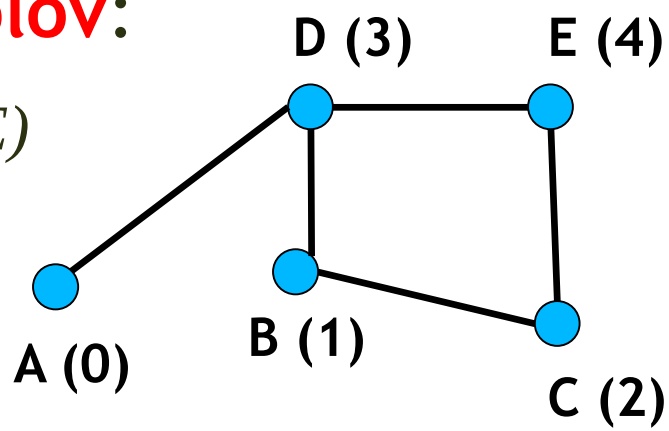

```
boolean[][] graf =
        new boolean[n][n]
```

	A	B	C	D	E
A	F	F	F	T	F
B	F	F	T	T	F
C	F	T	F	F	T
D	T	T	F	F	T
E	F	F	T	T	F

`graf[u][v]` = medzi vrcholmi *u* a *v* je hrana

Ako uložiť graf v programe?

- **Zoznam hrán + zoznam vrcholov**:
  - $(A, D), (B, D), (D, E), (B, C), (C, E)$
  - (A, B, C, D, E)
  - `List<Hrana>` + `List<Vrchol>`?



- **Incidenčná matica** pre graf s n vrcholmi a m hranami:
  - `boolean[][] graf = new boolean[n][m]`
  - `graf[u][e]` – `true`, práve vtedy keď vrchol **u** je jedným z koncových vrcholov hrany **e**
  - hrana $e = (u, v)$ je **incidentná** s vrcholmi u a v

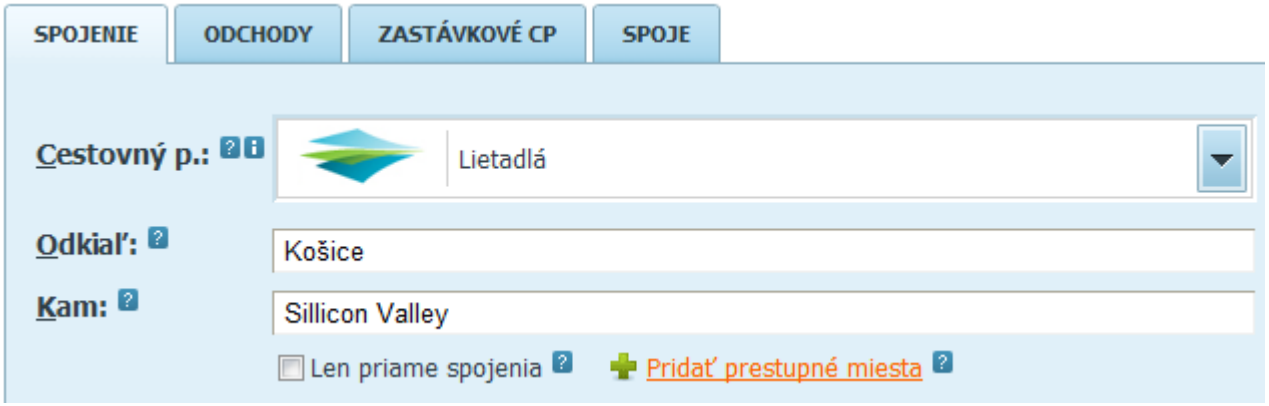
Ako uložiť graf v programe?

- Objektový prístup (knižnica *PAZGraphs.jar*)
- Základné objekty:
  - **Graph** – reprezentuje graf
  - **Vertex** – reprezentuje vrchol grafu
  - **Edge** – reprezentuje hranu v grafe

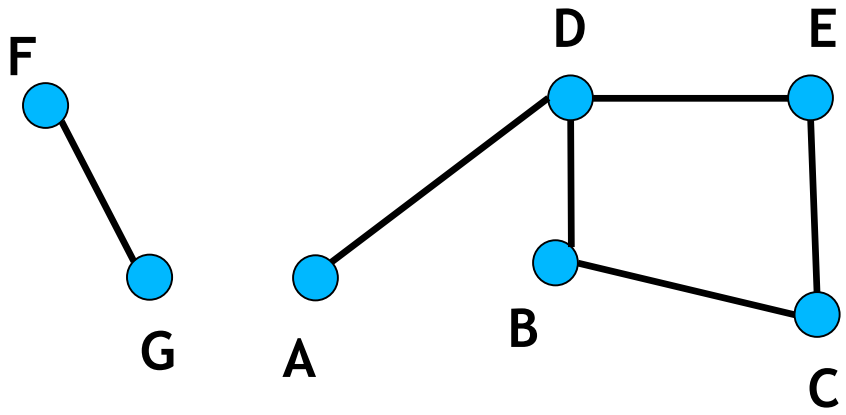
```
Graph fb = new Graph();
Vertex u = fb.addVertex("Janko");
Vertex v = fb.addVertex("Marienka");
Edge priatelstvo = fb.addEdge(u, v);
System.out.println(fb);
```

Prehľadávanie grafov

Sú Košice odrezané od sveta?

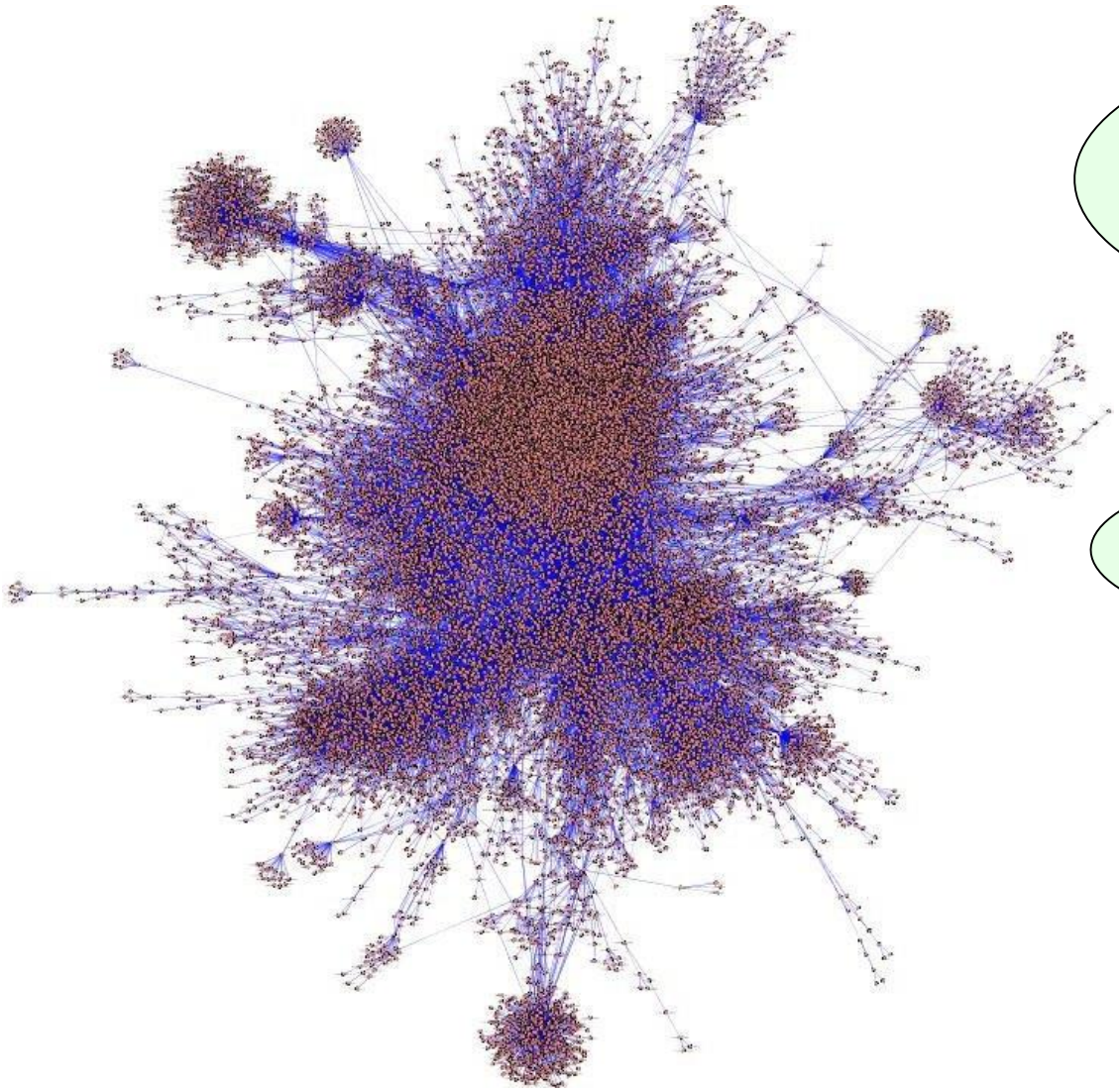


Súvislosť grafu



- Problém:
  - Ako zistiť, či je graf **súvislý**, t.j., či existuje spojenie medzi každými 2 vrcholmi grafu?
  - ***Interpretácia:***
    - súvislosť cestnej/komunikačnej siete
    - letecké spojenie medzi všetkými mestami
    - izolované sociálne skupinky v kolektíve

Súvislosť: Pozriem a vidím?

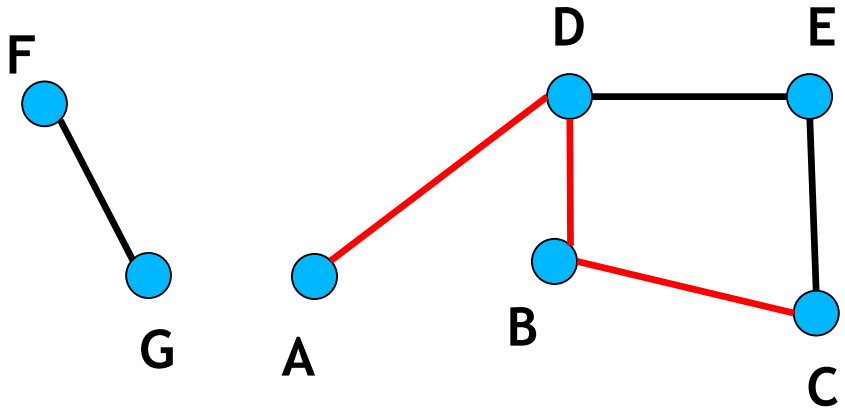


Pozriem a vidím „nefunguje“ pre veľké grafy.

„Pozriem a vidím“ v tabuľke?

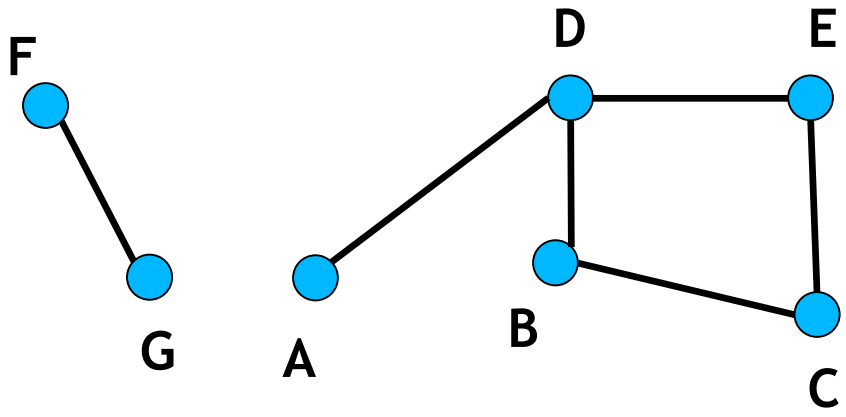
	A	B	C	D	E
A	F	F	F	T	F
B	F	F	T	T	F
C	F	T	F	F	T
D	T	T	F	F	T
E	F	F	T	T	F

Terminológia (neformálne)



- **Podgraf**
  - ľubovoľná podmnožina vrcholov a podmnožina s nimi incidentných hrán
- **Cesta**
  - **postupnosť vrcholov** grafu **bez opakovania**, v ktorej každé 2 **za sebou** idúce vrcholy sú **spojené hranou**
  - Príklad cesty: A, D, B, C
- **Súvislý graf**
  - medzi každými dvoma vrcholmi existuje cesta

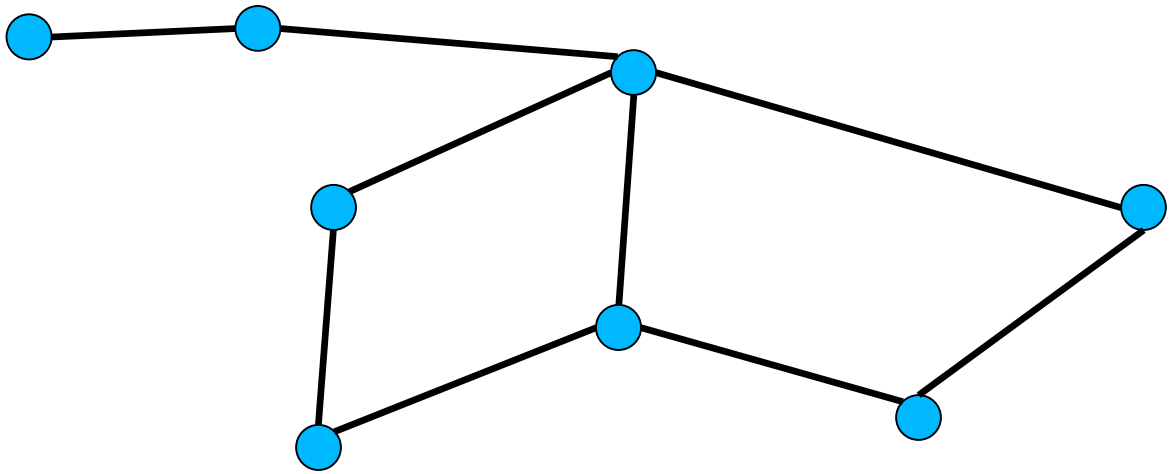
Súvislosť grafu - idea



- Idea algoritmu:
  - zistiť, či sa z nejakého vrcholu grafu vieme dostať do všetkých ostatných – **systematické prehľadávanie grafu**
  - „implementácia“: po navštívení každého vrcholu navštívime **aj všetkých** jeho susedov

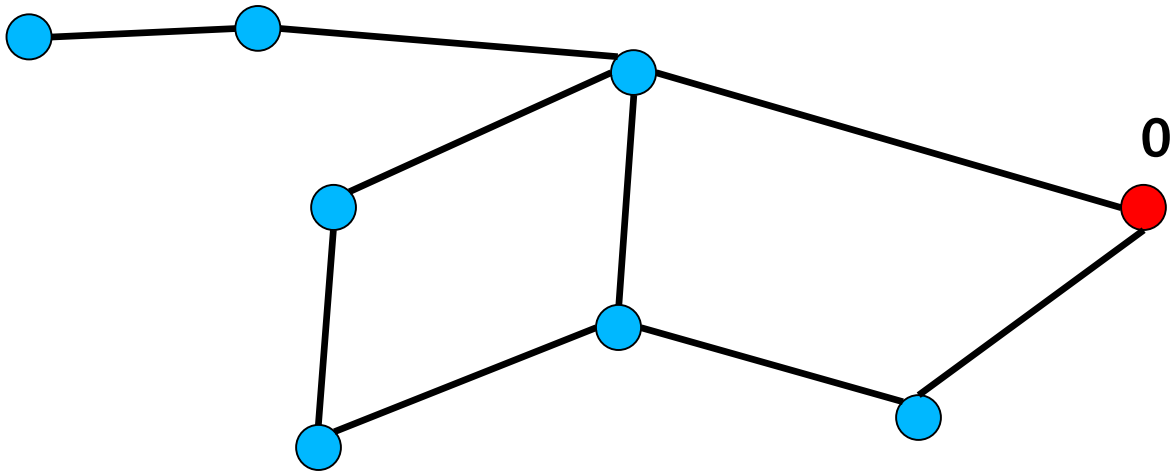
Prehľadávanie do šírky

- Pracuje vo fázach:
  - v každej fáze **navštívime nenavštívených susedov**, tých vrcholov, ktoré boli **po prvý krát navštívené** v predchádzajúcej fáze



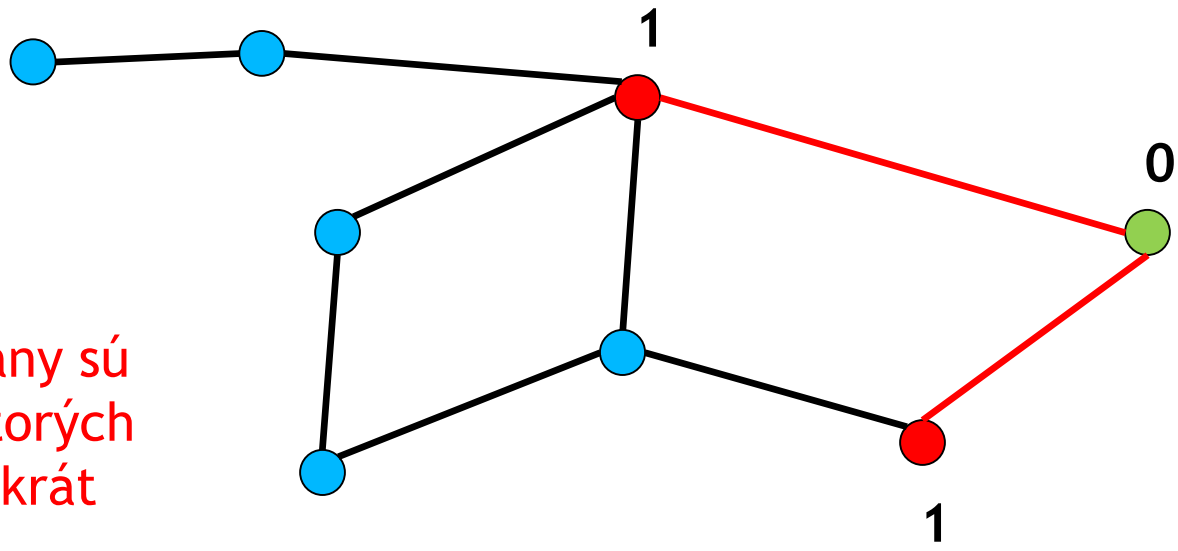
Prehľadávanie do šírky

- Pracuje vo fázach:
  - v každej fáze **navštívime nenavštívených susedov**, tých vrcholov, ktoré boli **po prvý krát navštívené** v predchádzajúcej fáze



Prehľadávanie do šírky

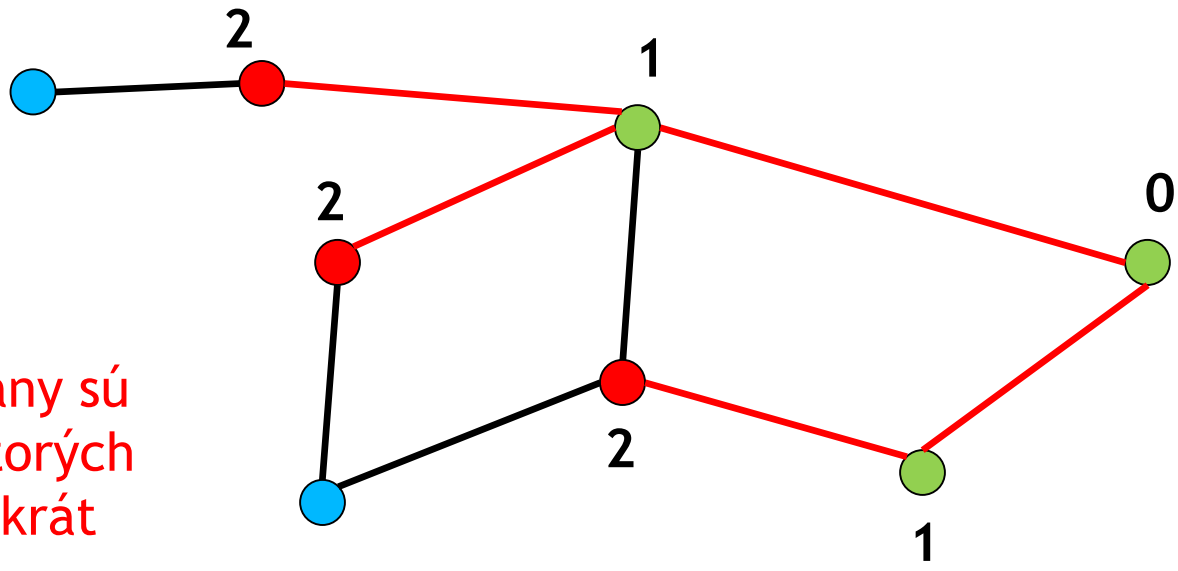
- Pracuje vo fázach:
  - v každej fáze **navštívime nenavštívených susedov**, tých vrcholov, ktoré boli **po prvý krát navštívené** v predchádzajúcej fáze



Červené hrany sú hrany, po ktorých vrchol prvý krát navštívime

Prehľadávanie do šírky

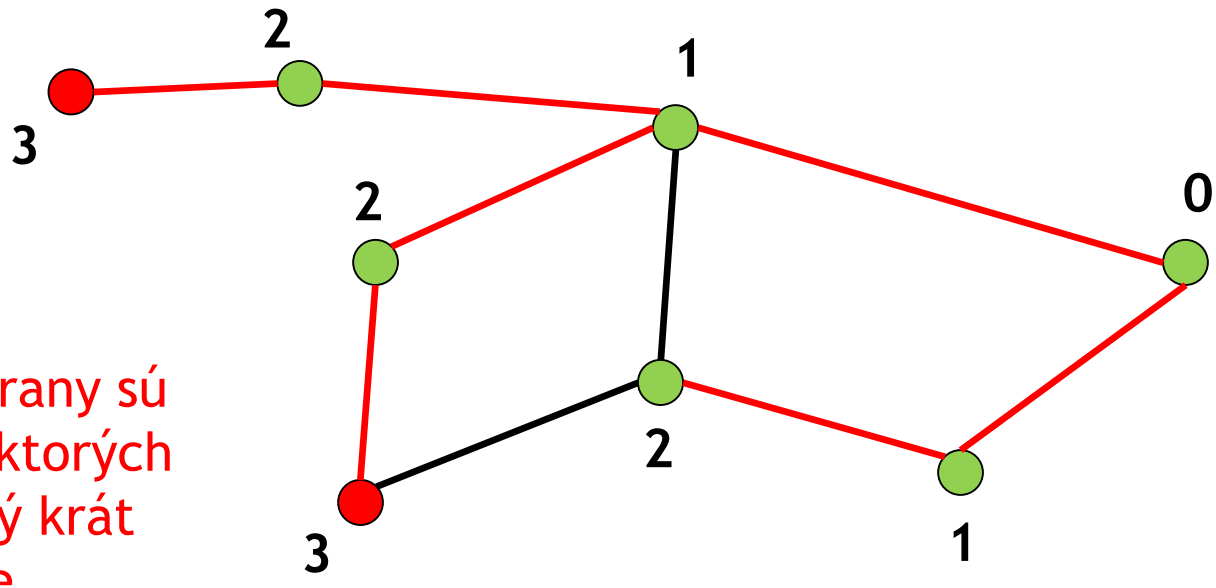
- Pracuje vo fázach:
  - v každej fáze **navštívime nenavštívených susedov**, tých vrcholov, ktoré boli **po prvý krát navštívené** v predchádzajúcej fáze



Červené hrany sú hrany, po ktorých vrchol prvý krát navštívime

Prehľadávanie do šírky

- Pracuje vo fázach:
  - v každej fáze **navštívime nenavštívených susedov**, tých vrcholov, ktoré boli **po prvý krát navštívené** v predchádzajúcej fáze



Červené hrany sú hrany, po ktorých vrchol prvý krát navštívime

Prehľadávanie do šírky - BFS

- Prehľadávanie do šírky
  - **Breadth-first search (BFS)**
- Použijeme rad
  - obsahuje len navštívené vrcholy, ktorých susedov sme ešte z tohto vrcholu navštívili

Prehľadávanie do šírky - BFS

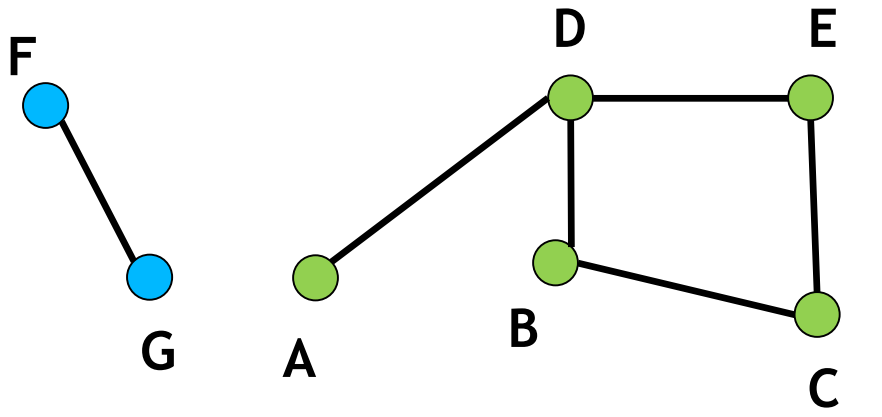
```
public static Map<Vertex, Boolean> bfs(Graph g, Vertex start) {
    Map<Vertex, Boolean> navstiveny = g.createVertexMap(false);

    Queue<Vertex> rad = new LinkedList<Vertex>();
    navstiveny.put(start, true); rad.offer(start);
    while (!rad.isEmpty()) {
        Vertex v = rad.poll();
        for (Vertex sused : v.getOutNeighbours())
            if (!navstiveny.get(sused)) {
                navstiveny.put(sused, true);
                rad.offer(sused);
            }
     }
     return navstiveny;
}
```

Navštívime nenavštívených susedov a pridáme ich do radu, aby sme nezabudli navštívit aj ich susedov.

Prehľadávanie do šírky - BFS

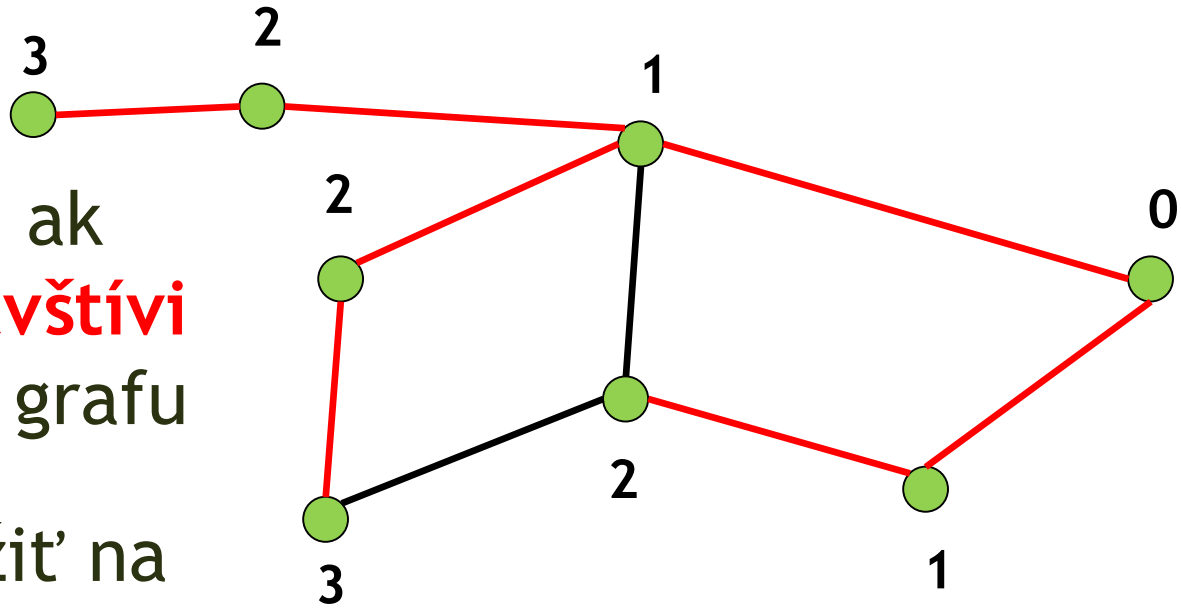
- BFS spustený z A, B, C, D alebo E nikdy nenavštívi vrchol F a G
  - graf nie je súvislý



dva komponenty súvislosti

- **Komponent grafu**
  - **maximálny súvislý podgraf**
  - množina vrcholov, ktoré sú navzájom prepojené cestami v grafe
  - na hľadanie komponentov ide použiť napr. BFS (ale aj iné algoritmy na testovanie súvislosti)

Prehľadávanie do šírky - BFS



- Graf je **súvislý**, ak BFS prechod **navštívi všetky vrcholy** grafu
- BFS vieme použiť na výpočet **najkratšej cesty** z daného vrcholu do všetkých ostatných
- Červené hrany (objaviteľské hrany) vytvárajú súvislý podgraf bez cyklov:
  - minimálna množina hrán, ktoré musíme zachovať, aby graf ešte ostal súvislý

Kostra grafu

- **Kostra grafu** je taká **podmnožina** T **hrán** grafu G, že platí:
  1. Medzi každými 2 vrcholmi grafu existuje cesta využívajúca len hrany kostry T
  2. Odobratím ľubovoľnej hrany kostry už vlastnosť 1 nebude platiť

- Kostra grafu – minimálna množina hrán grafu, ktorá „drží graf pokope“
  - graf môže mať veľa kostier
- Objaviteľské hrany v BFS definujú **BFS kostru**

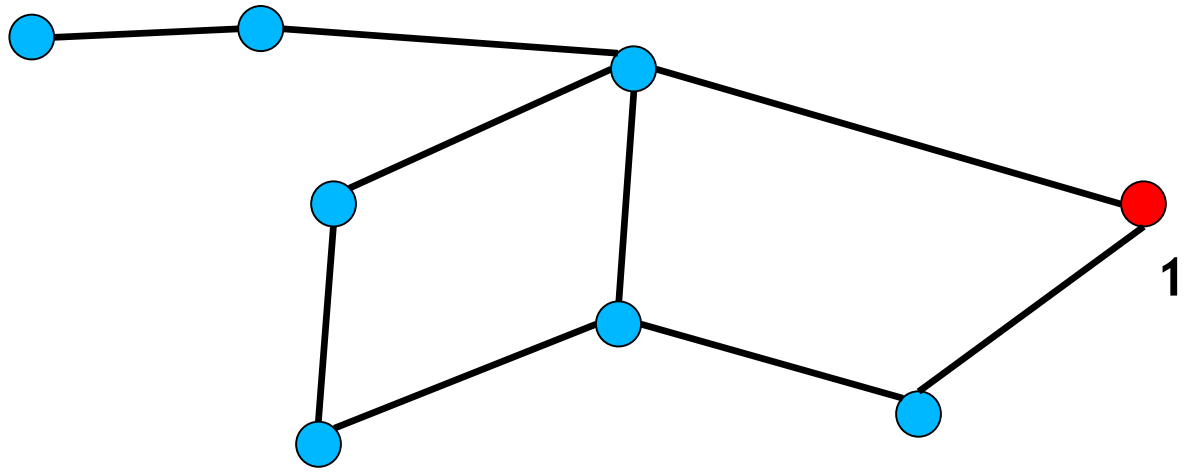
Aplikácie BFS

- **Sociálna sieť** – nájdenie sociálnej vzdialenosti medzi osobami
  - fenomén malého sveta – six degrees of separation
- **Sieť dopravných spojení** – nájdenie spojenia s minimálnym počtom prestupov
  - vrchol – stanica, hrana – dopravné spojenie
- **Komunikačná sieť**
  - nájdenie minimálnej množiny spojení na upgrade, aby medzi každými 2 uzlami bolo spojenie po upgradovaných (napr. optických) linkách

Prehľadávanie do hĺbky

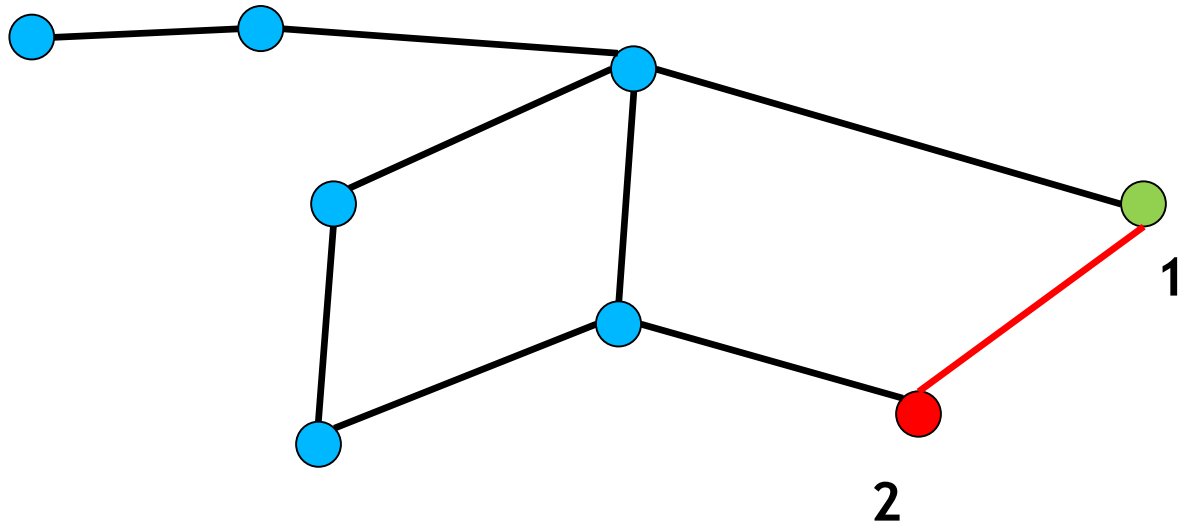
- Prehľadávanie do hĺbky
  - **depth-first search DFS**
- **Stratégia** návštevy vrcholu:
  - označ vrchol ako navštívený
  - postupne navštív všetky jeho susedné nenavštívené vrcholy
  - vráť sa do vrcholu, z ktorého si sem prišiel
- Narozdiel od BFS („vlna šíriaca sa v grafe“) je DFS predstaviteľné ako „putovanie v grafe“

DFS



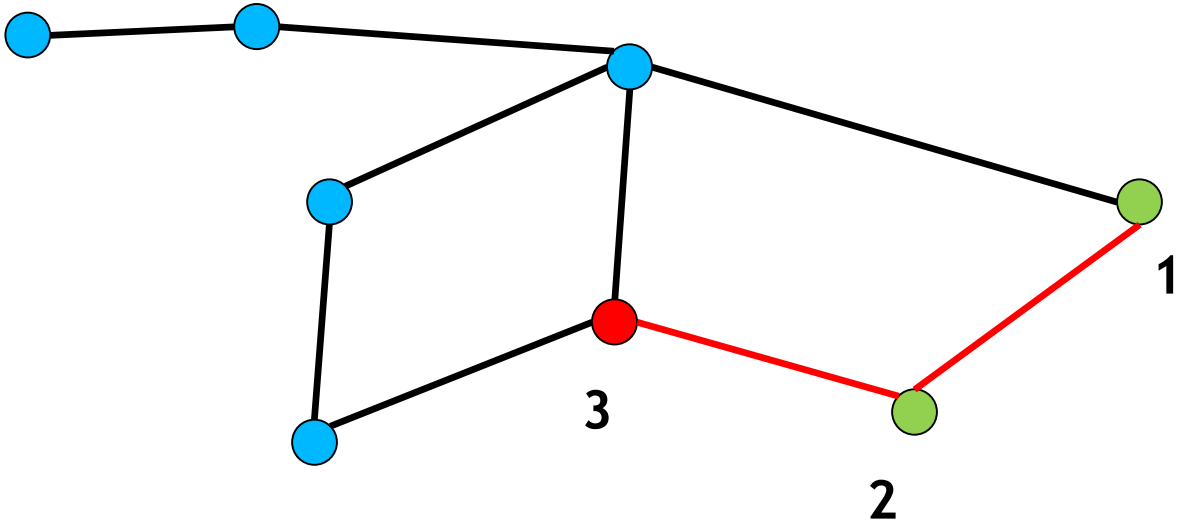
- Červené hrany sú hrany, po ktorých vrchol prvý krát navštívime (objaviteľské hrany)

DFS



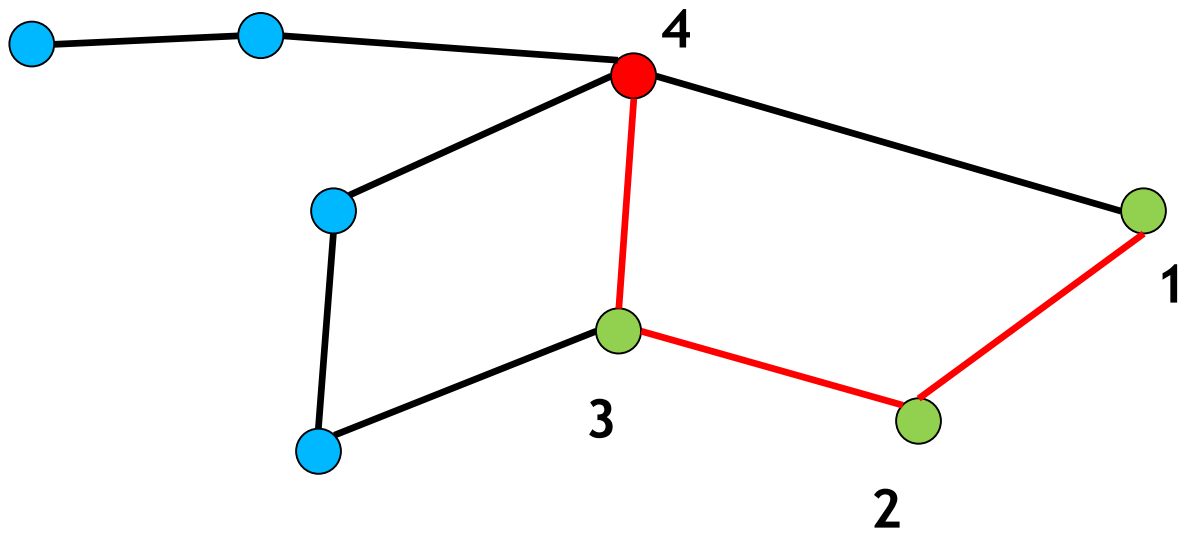
- Červené hrany sú hrany, po ktorých vrchol prvý krát navštívime (objaviteľské hrany)

DFS



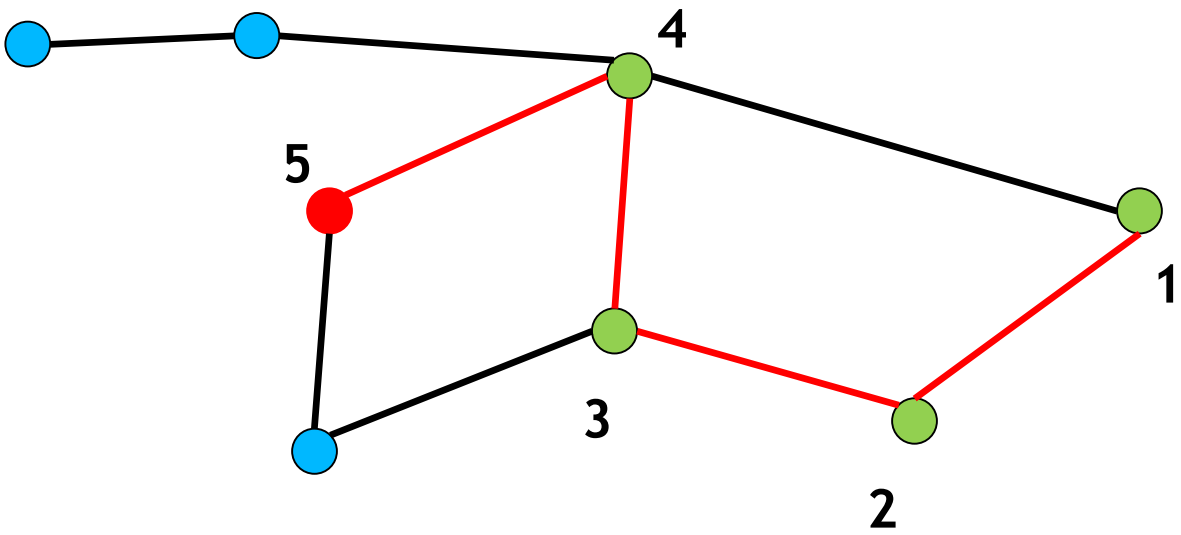
- Červené hrany sú hrany, po ktorých vrchol prvý krát navštívime (objaviteľské hrany)

DFS



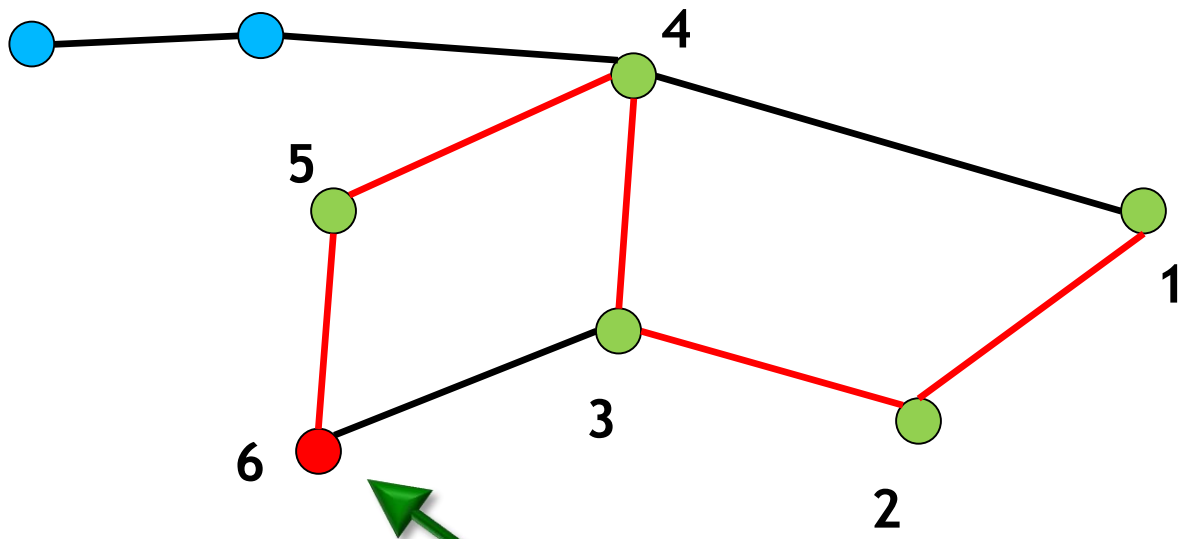
- Červené hrany sú hrany, po ktorých vrchol prvý krát navštívime (objaviteľské hrany)

DFS



- Červené hrany sú hrany, po ktorých vrchol prvý krát navštívime (objaviteľské hrany)

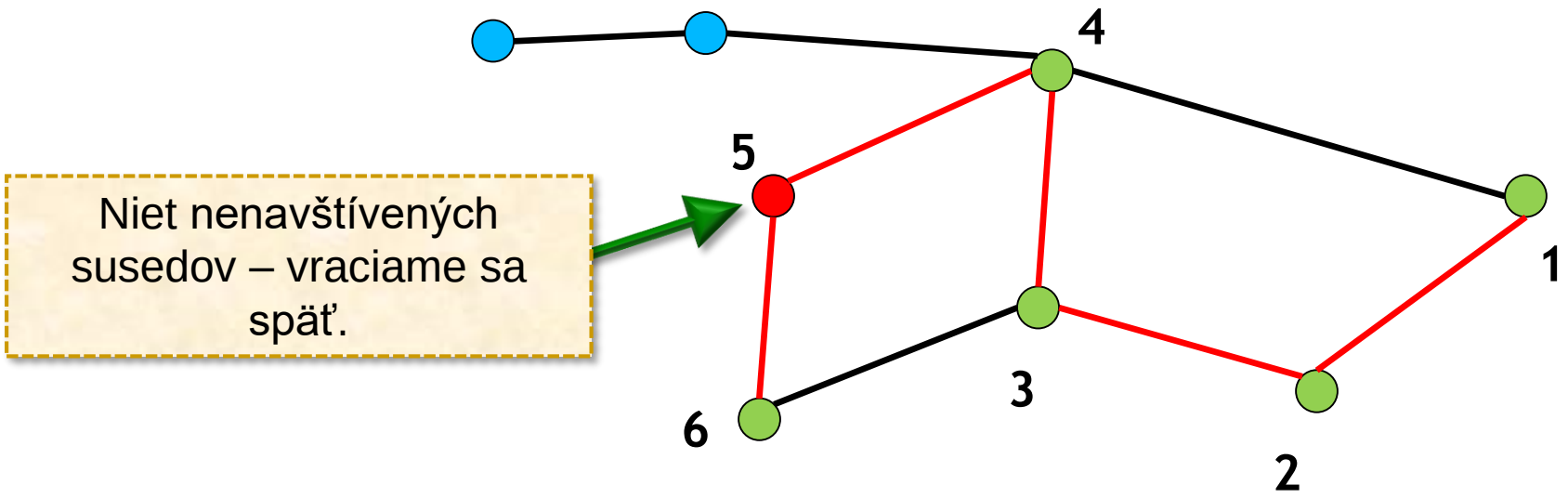
DFS



- Červené hrany sú hrany, po ktorých vrchol prvý krát navštívime (objaviteľské hrany)

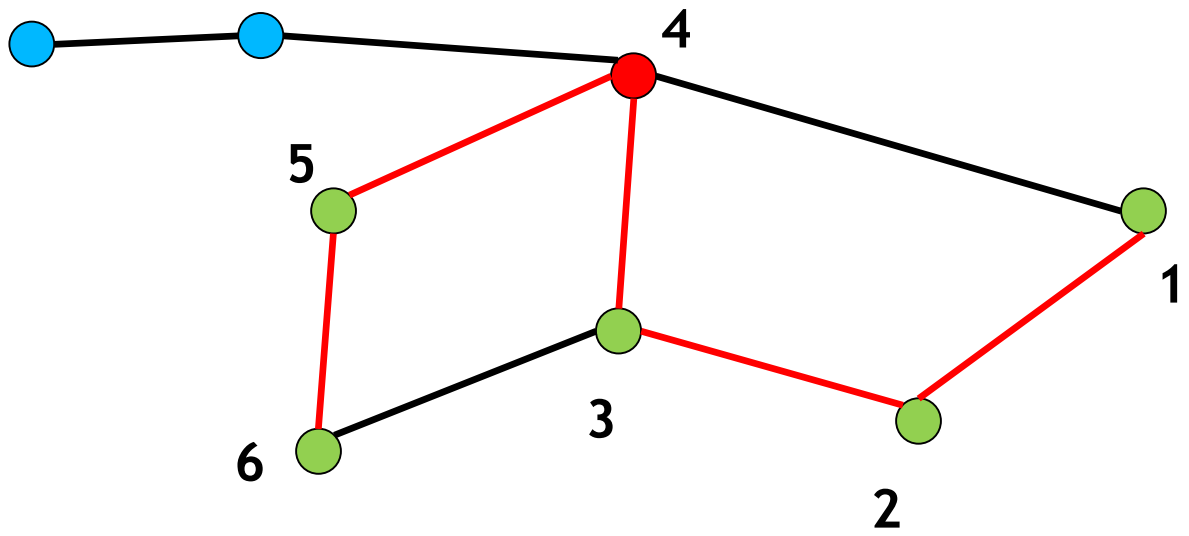
Niet nenavštívených susedov – vraciame sa späť.

DFS



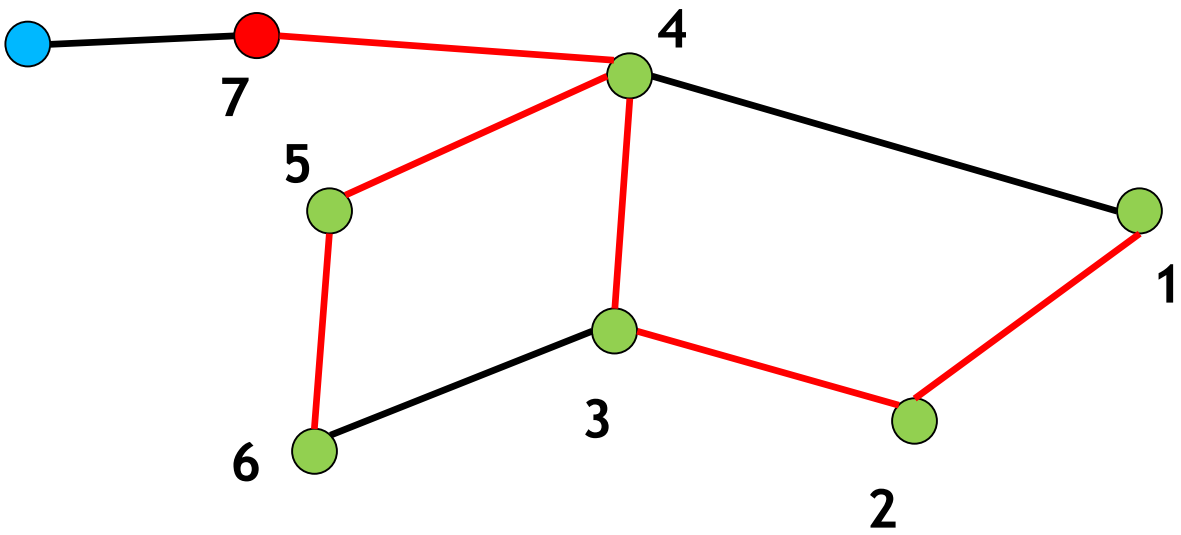
- Červené hrany sú hrany, po ktorých vrchol prvý krát navštívime (objaviteľské hrany)

DFS



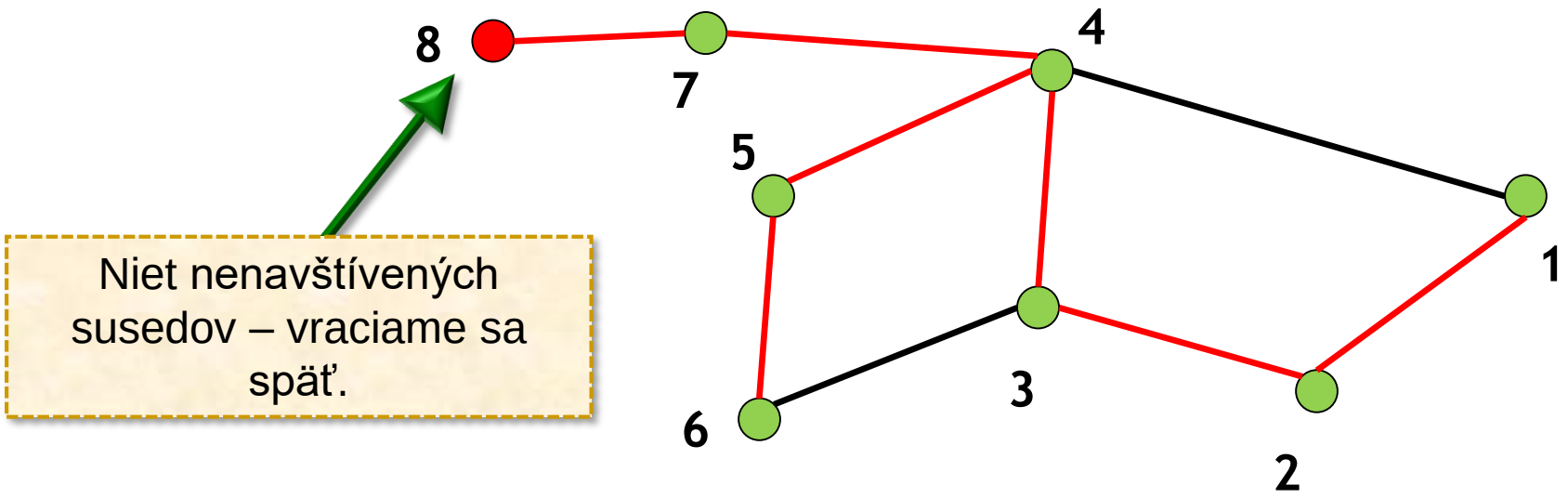
- Červené hrany sú hrany, po ktorých vrchol prvý krát navštívime (objaviteľské hrany)

DFS



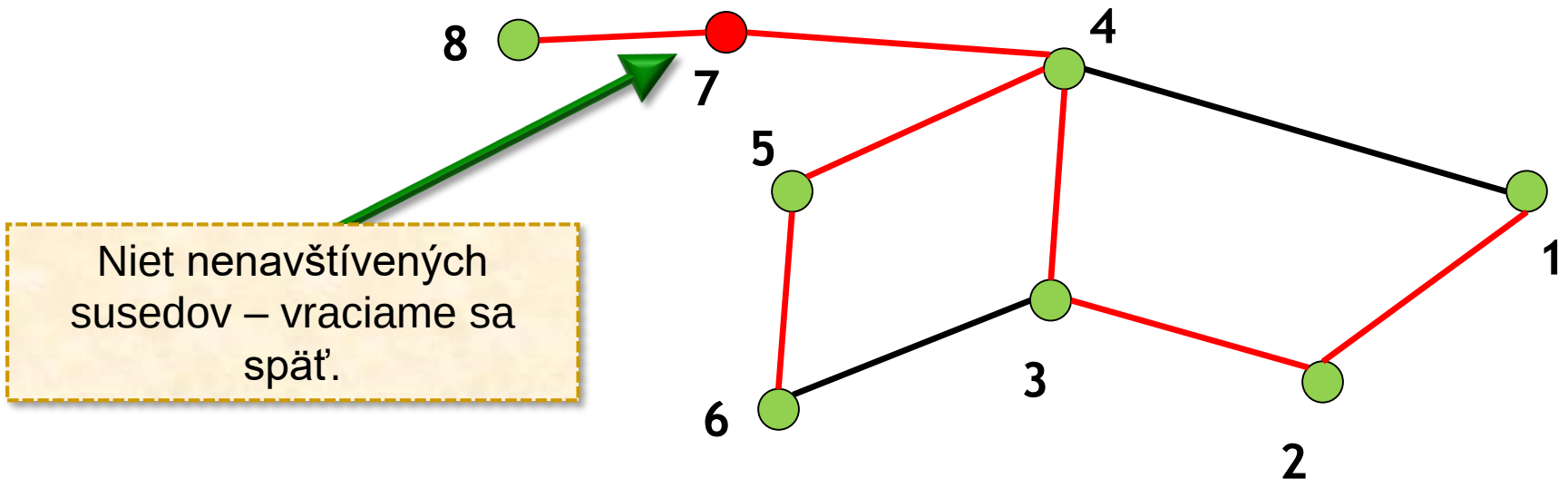
- Červené hrany sú hrany, po ktorých vrchol prvý krát navštívime (objaviteľské hrany)

DFS



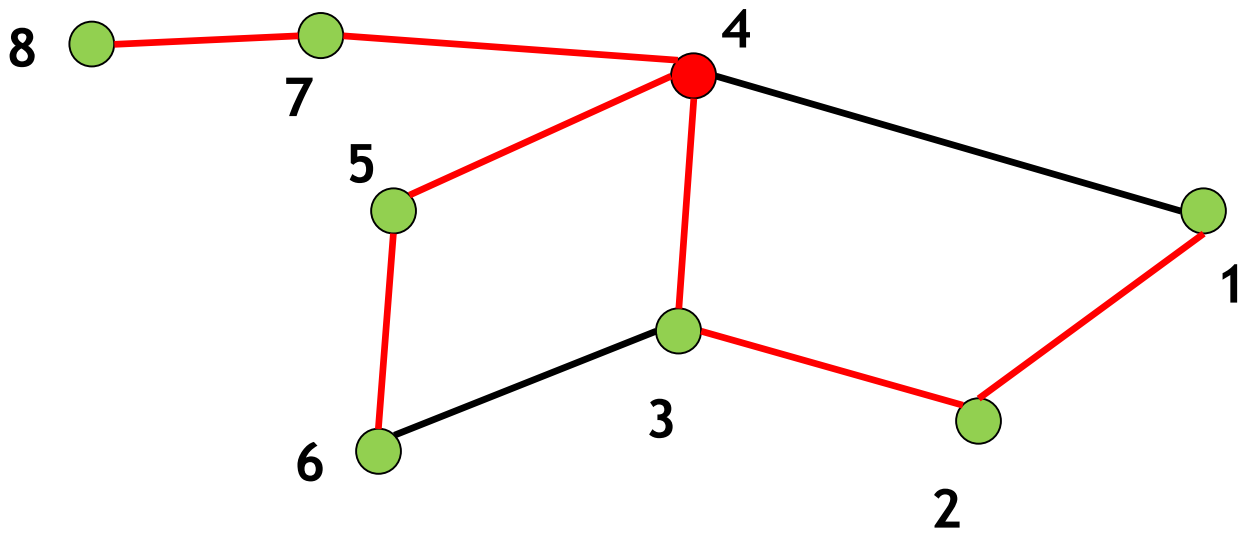
- Červené hrany sú hrany, po ktorých vrchol prvý krát navštívime (objaviteľské hrany)

DFS



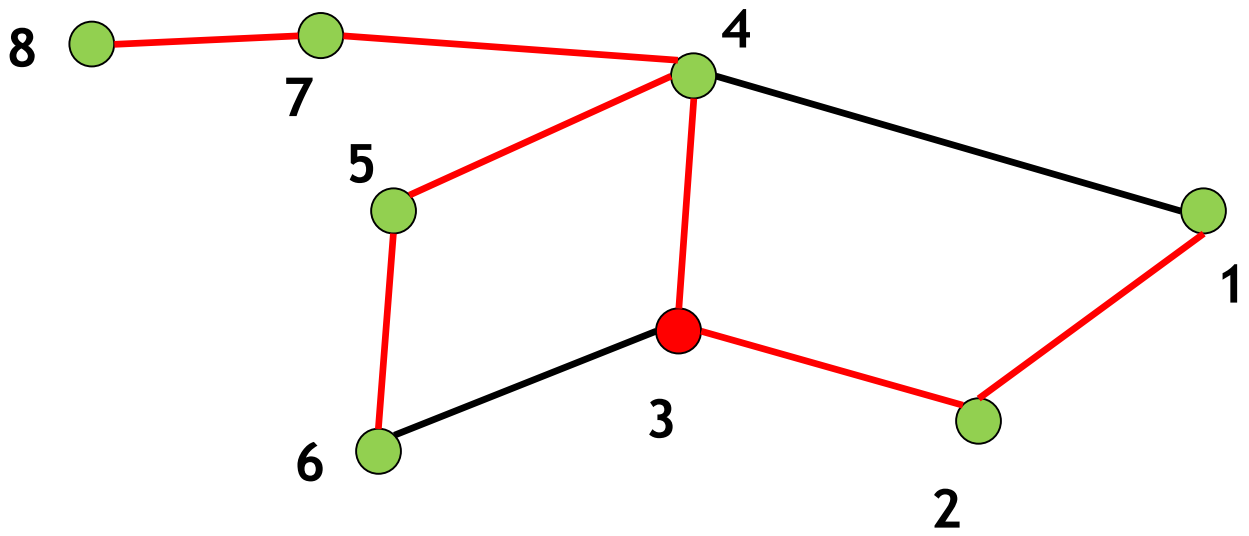
- Červené hrany sú hrany, po ktorých vrchol prvý krát navštívime (objaviteľské hrany)

DFS



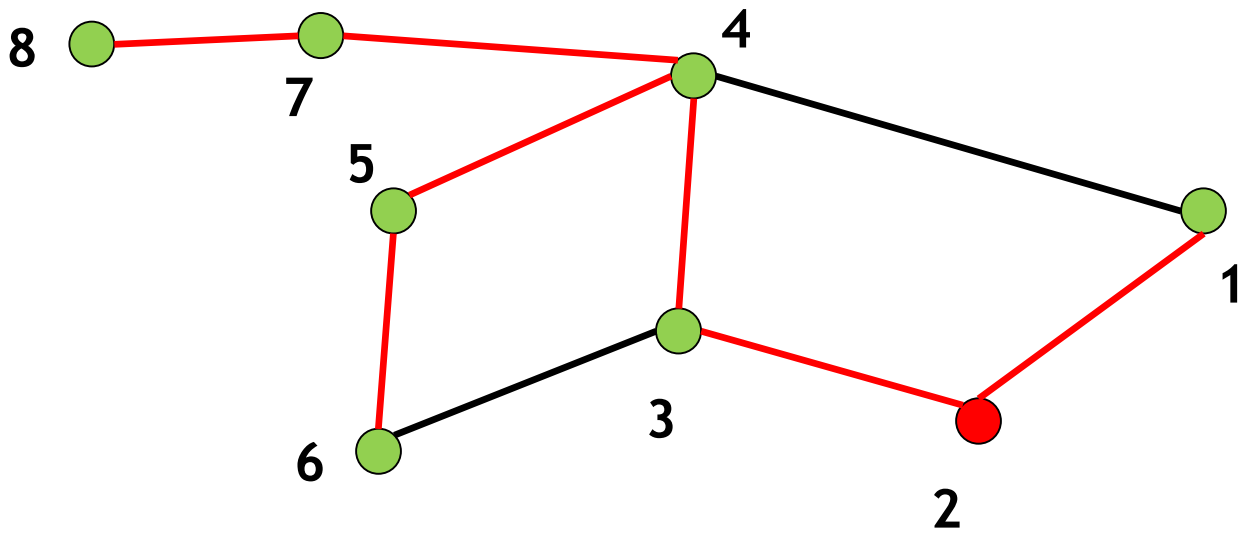
- Červené hrany sú hrany, po ktorých vrchol prvý krát navštívime (objaviteľské hrany)

DFS



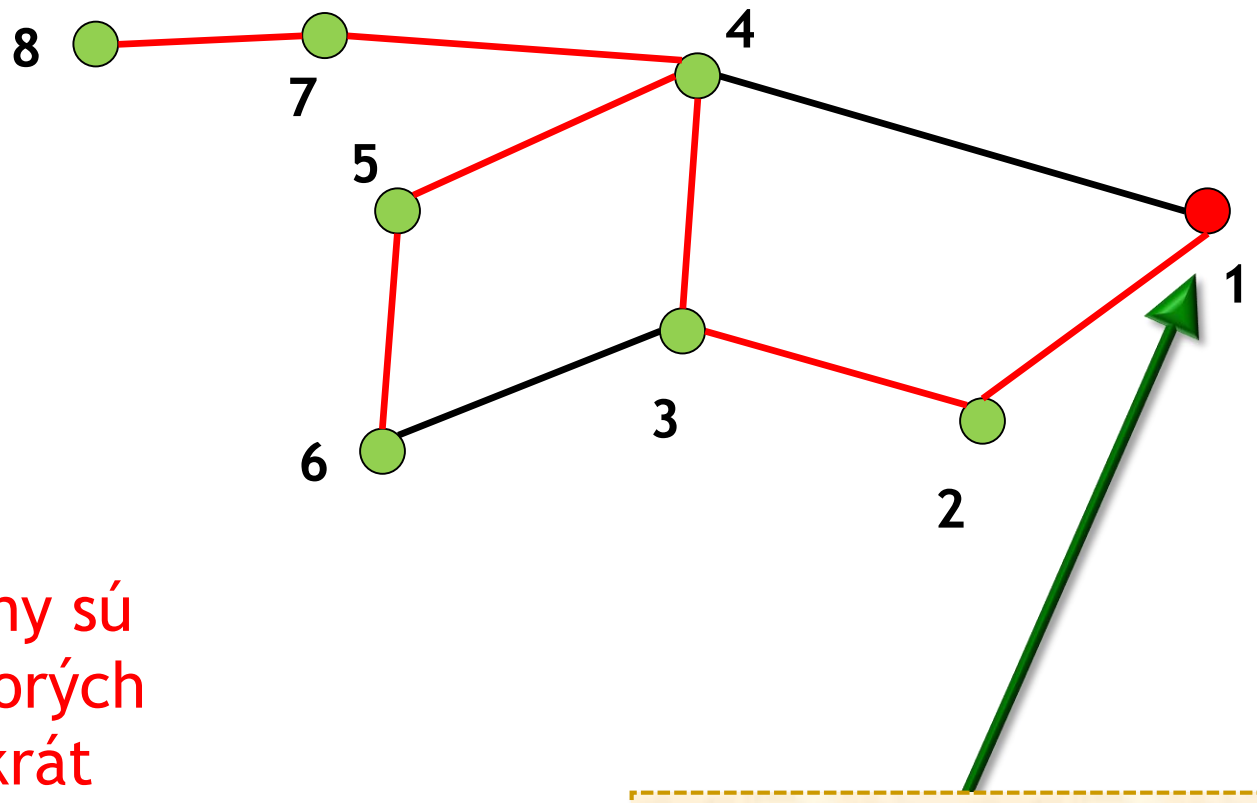
- Červené hrany sú hrany, po ktorých vrchol prvý krát navštívime (objaviteľské hrany)

DFS



- Červené hrany sú hrany, po ktorých vrchol prvý krát navštívime (objaviteľské hrany)

DFS



- Červené hrany sú hrany, po ktorých vrchol prvý krát navštívime (objaviteľské hrany)

Niet nenavštívených susedov a sme tam, kde sme začali: **končíme!**

Rekurzívne DFS

```
public void dfs(Vertex v, Map<Vertex, Boolean> navstiveny) {
    navstiveny.put(v, true);
    for (Vertex sused : v.getOutNeighbours())
        if (!navstiveny.get(sused))
            dfs(sused, navstiveny);
}
```

Poznačíme návštevu

Postupne navštívime nenavštívených susedov

```
public Map<Vertex, Boolean> dfsRekurzivne(Graph g, Vertex start) {
    Map<Vertex, Boolean> navstiveny = g.createVertexMap(false);
    dfs(start, navstiveny);
    return navstiveny;
}
```

Nerekurzívne DFS

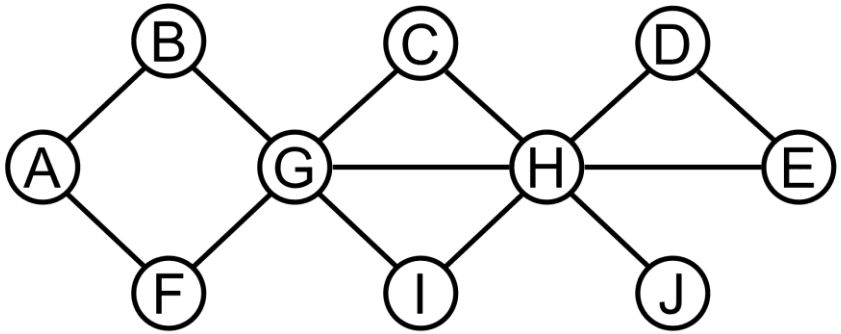
```
public static Map<Vertex, Boolean> dfsNerekurzivne(Graph g, Vertex start) {
    Map<Vertex, Boolean> navstiveny = g.createVertexMap(false);

    Stack<Vertex> zasobnik = new Stack<Vertex>();
    zasobnik.push(start);
    while (!zasobnik.isEmpty()) {
        Vertex v = zasobnik.pop();
        if (navstiveny.get(v))
            continue;
        navstiveny.put(v, true);
        for (Vertex sused : v.getOutNeighbours())
            if (!navstiveny.get(sused))
                zasobnik.push(sused);
     }
     return navstiveny;
}
```

Vlastnosti DFS

- Objaviteľské hrany (hrany, po ktorých sme po prvý krát navštívili vrchol) v DFS definujú **DFS kostru**
- DFS kostra – má isté užitočné „grafárske“ vlastnosti týkajúce sa nekostrových
  - napr. efektívne hľadanie **artikulácii** (vrcholov, po ktorých odstránení sa graf „rozpadne“ = nebude súvislý) v grafe

Odstránením G alebo H sa graf rozpadne.



BFS vs. DFS

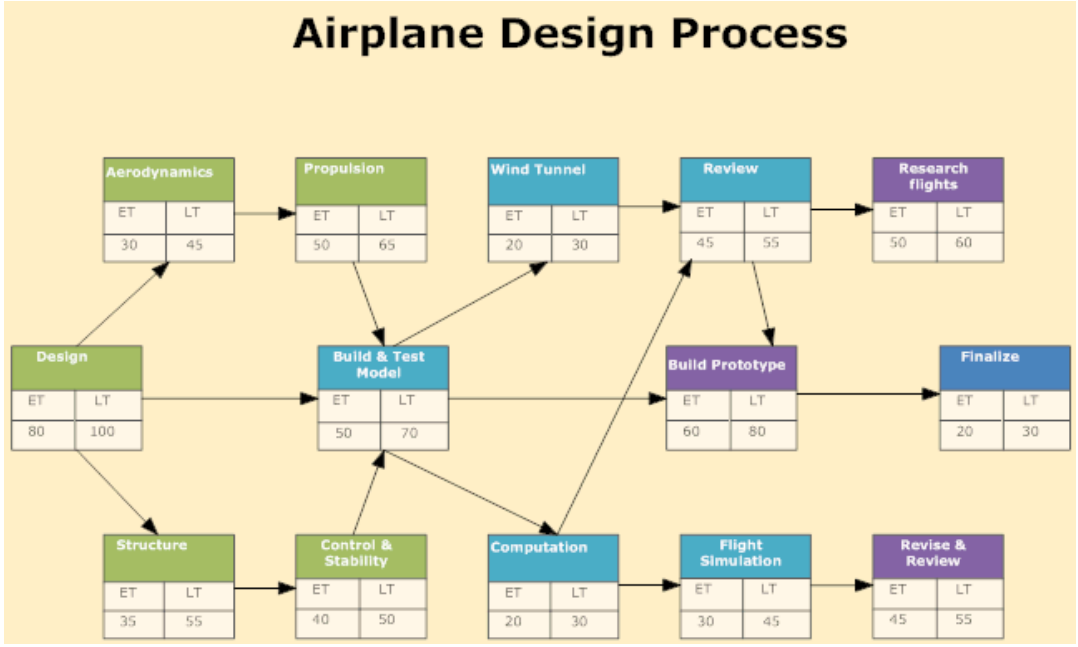
- Časová náročnosť oboch algoritmov je pri **vhodnej reprezentácii** grafu $O(n + m)$, kde n je počet vrcholov a m je počet hrán
  - pri použití **matice susednosti** majú oba algoritmy časovú zložitosť $O(n^2)$
    - každý z n vrcholov navštívime len raz, v každom vrchole preskúmame nanajvýš n jeho susedov
- DFS vo všeobecnosti vyžaduje **menej pamäte** (pri vhodnej implementácii)
- BFS navyše hľadá aj **najkratšie cesty**

Grafová terminológia

- **Excentricita vrcholu**:
  - vzdialenosť od neho k najvzdialenejšieho vrcholu
    - algoritmus: BFS prehľadávanie
- **Centrum grafu**:
  - množina vrcholov s minimálnou excentricitou
- **Priemer grafu**:
  - maximálna vzdialenosť medzi 2 vrcholmi grafu
    - priemer grafu = maximálna excentricita v grafe (spomedzi všetkých vrcholov grafu)

Topologické triedenie

a grafy, kde hrany majú orientáciu

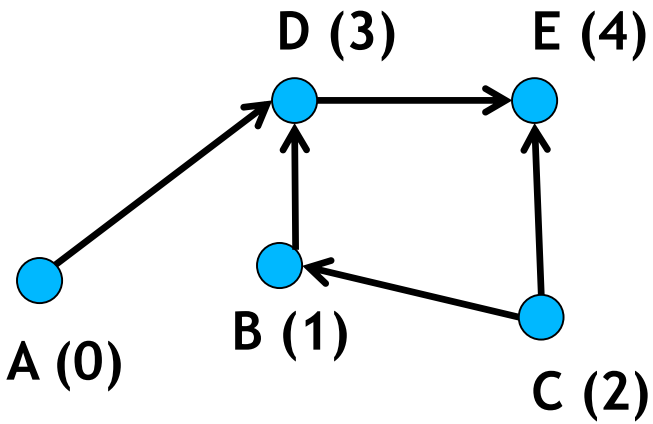


Orientovaný graf

- Niekedy vzťahy (relácie) **nie sú symetrické**:
  - Osoba A má rada osobu B, ale osoba B nemá rada A
- Nesymetrická relácia „**začať pred**“
  - PAZ1a musí byť absolvované pred PAZ1b
- Nesymetrické vzťahy (relácie) modelujeme **orientovaným grafom** (directed graph)
  - orientovanú hranu voláme **šíp**
  - hrany nie sú čiary, ale šípky

Orientovaný graf v programe

Matica susednosti:




```
boolean[][] graf =
        new boolean[n][n]
```

	A	B	C	D	E
A	F	F	F	T	F
B	F	F	F	T	F
C	F	T	F	F	T
D	F	F	F	F	T
E	F	F	F	F	F

graf[u][v] = z **u** do **v** ide hrana v grafe

Algoritmy pre orient. grafy

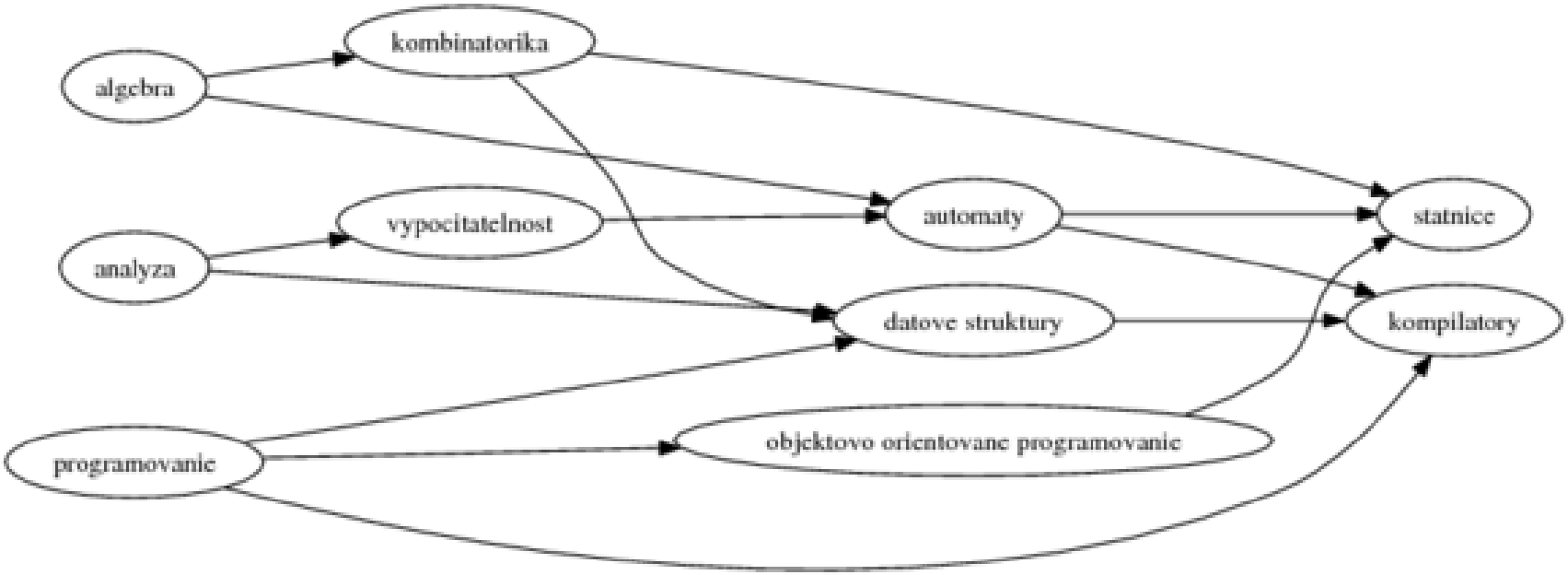
- DFS a BFS prechody vieme použiť na **nájdenie** vrcholov **dostupných** zo zadaného vrcholu po orientovaných cestách
  - orientovaná cesta = cesta určená šípmi

- **Topologické usporiadanie:**
  - nájsť takú postupnosť vrcholov, aby ak z **u** do **v** je v grafe orientovaná hrana, tak vrchol **u** je v postupnosti pred vrcholom **v**

Topologické usporiadanie

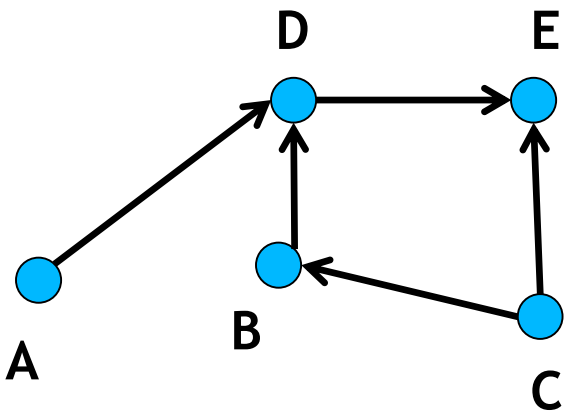
- **Motivácia:**
  - množina činností
  - vieme, čo musí **byť spravené skôr**:
  - **A** musí byť spravená pred **B**, pretože činnosť **B** potrebuje použiť výsledok činnosti **A**:
    - košeľa musí byť oblečená skôr ako kabát
    - PAZ1a musí byť spravený pred PAZ1b
    - vodoinštaláciu môžem ťahať, až keď sú hotové múry
- Problém: nájsť takú postupnosť vykonávania činností, aby boli splnené všetky podmienky

Topologické usporiadanie



Topologické usporiadanie

- Topologické usporiadanie:
  - nájsť takú postupnosť vrcholov, aby ak z **u** do **v** je v grafe orientovaná hrana, tak **u** je v postupnosti pred vrcholom **v**

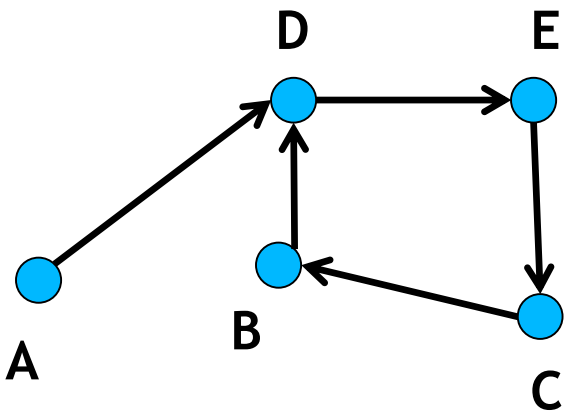


Orientovaný graf môže mať **viacero** topologických **usporiadaní.**

Topologicky usporiadané vrcholy:
A, C, B, D, E
C, B, A, D, E

Topologické usporiadanie

- Topologické usporiadanie:
  - nájsť takú postupnosť vrcholov, aby ak z **u** do **v** je v grafe orientovaná hrana, tak **u** je v postupnosti pred vrcholom **v**

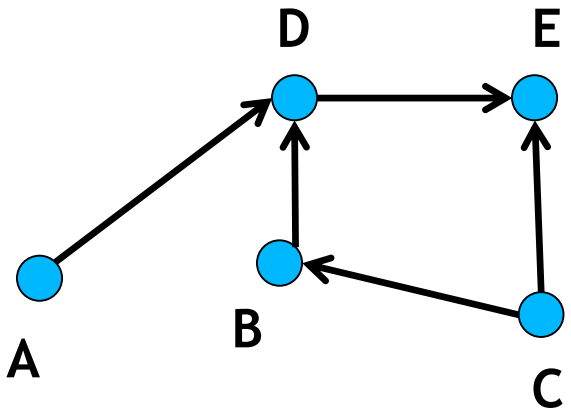


Existujú grafy, ktoré **nemožno** topologicky **usporiadať.**

TopSort - algoritmus

- **Idea:**
  - kým sa dá, opakuj:
    - vyber ľubovoľný vrchol, do ktorého **nevchádza žiadna** orientovaná **hrana**, „vypíš ho“ a **odstráň ho**
  - ak sa skončilo s prázdnym grafom, máme topologické usporiadanie vrcholov
  - ak sa skočilo s neprázdnym grafom, graf nemá topologické usporiadanie
- Prečo to funguje?
  - Dôkaz indukciou na počet vrcholov grafu (cvičenia)

TopSort – vizualizácia



A C B D E

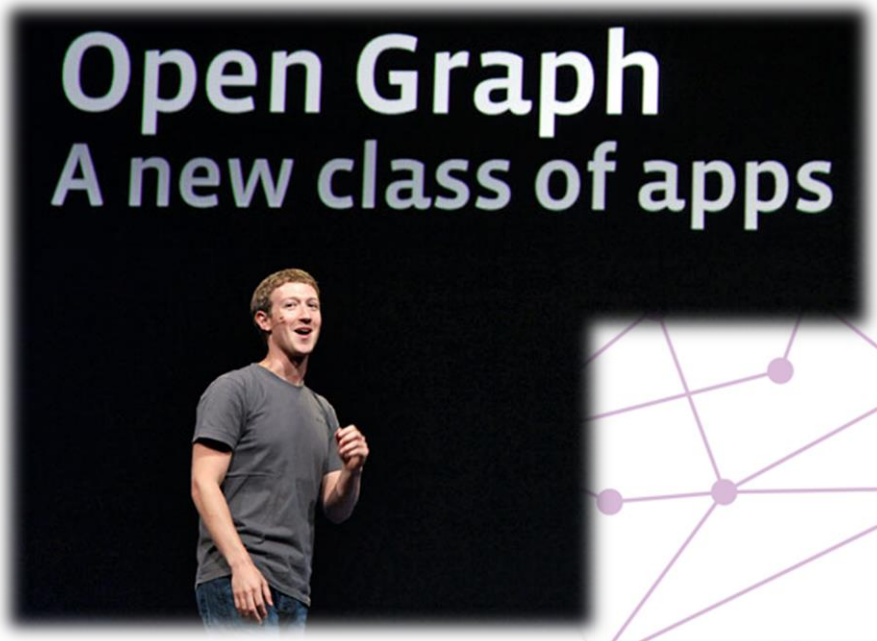
Topologické usporiadanie

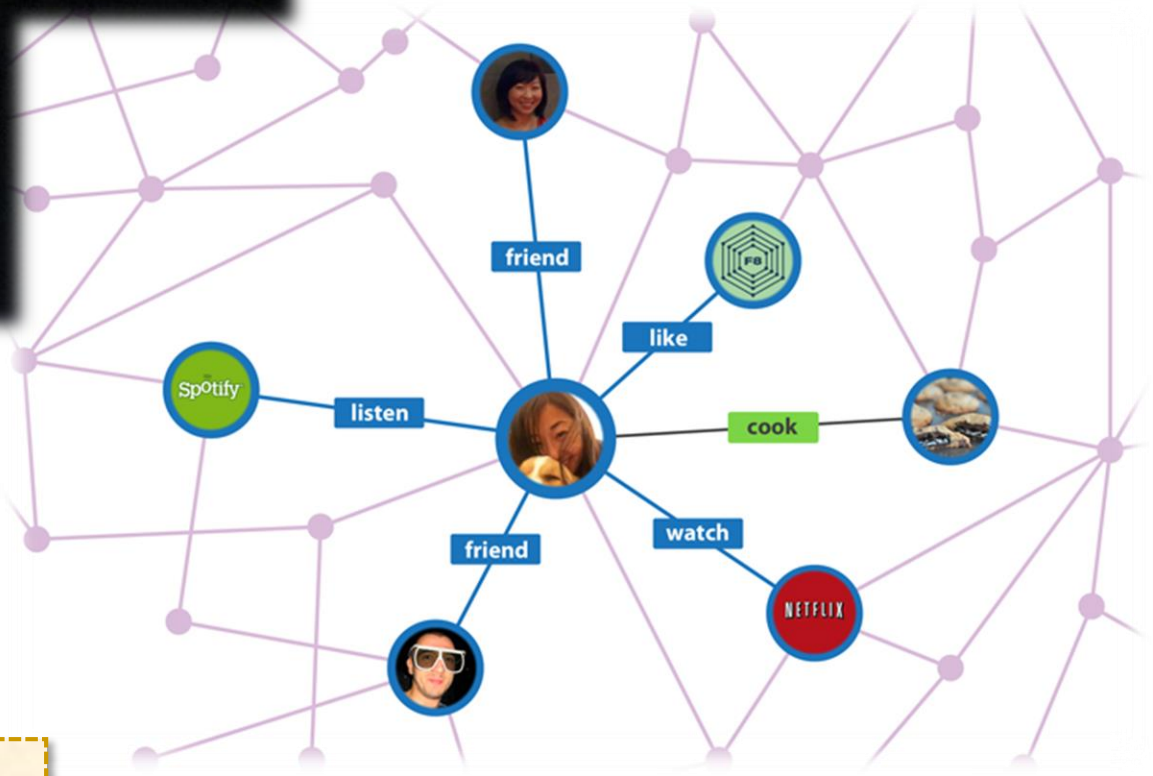
- Užitočný algoritmus pri **manažovaní projektov**
  - metóda PERT
- Časová zložitosť $O(n^2)$:
  - n odstraňovaných vrcholov
    - nájdenie vrcholu bez predchodcu $O(n)$
    - odstránenie vrcholu a s ním incidentných hrán $O(n)$
  - pri vhodnej reprezentácii grafu s n vrcholmi a m hranami $O(n+m)$
- Možno použiť na **nájdenie** orientovaných **cyklov** v grafe (viac na cvičeniach)

Sumarizácia

- **Graf**
  - prostriedok na zachytenie vzťahov medzi objektami
- **Grafy a grafové algoritmy**
  - neuveriteľné množstvo aplikácií a možností použitia
- **Prehľadávania grafov**
  - overenie súvislosti, najkratšie cesty, kostry, ...
- **Topologické triedenie**
  - usporiadanie vrcholov orientovaného grafu, hľadanie orientovaných cyklov, ...

„Graf náš každodenný“





facebook.com/upjs.paz

ak nie sú otázky...

Ďakujem za pozornosť!