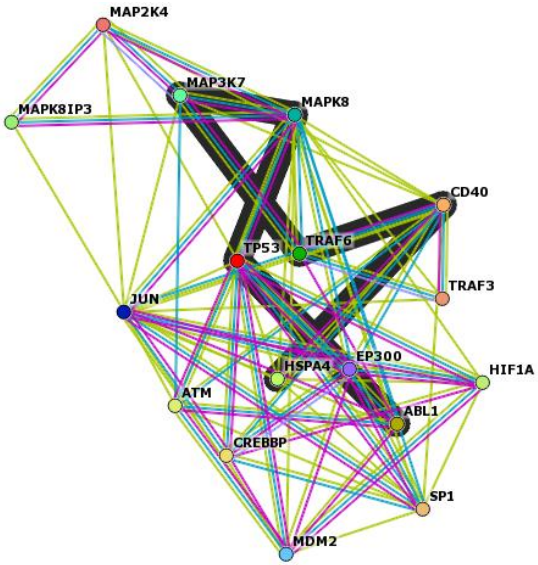
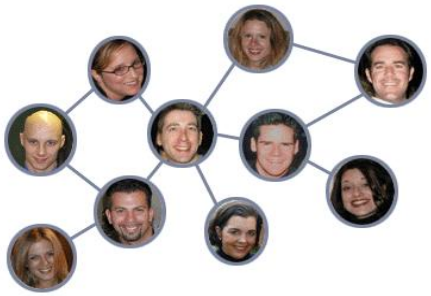
10. prednáška (24.4.2023)

Najkratšie cesty (v grafe)

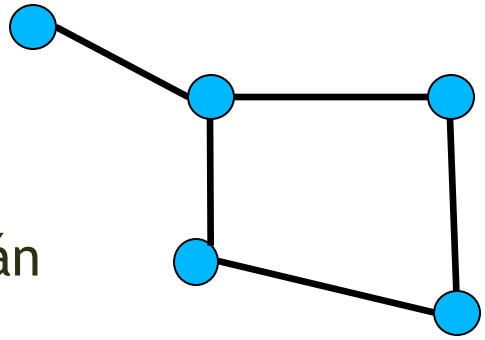


Grafy – čo už vieme...

- Umožňujú **modelovať** relácie medzi objektmi reálneho sveta
- Skladajú sa z **vrcholov** a **hrán** $G=(V, E)$
  - neorientované grafy (krúžky a čiary)
    - sociálne siete, dopravné siete
  - orientované grafy (krúžky a šípky)
    - dopravné siete s jednosmerkami, následnosť aktivít



- Prehľadávanie grafov:
  - **BFS** (do šírky)
    - bonus: cesty s najmenším počtom hrán
  - **DFS** (do hĺbky)



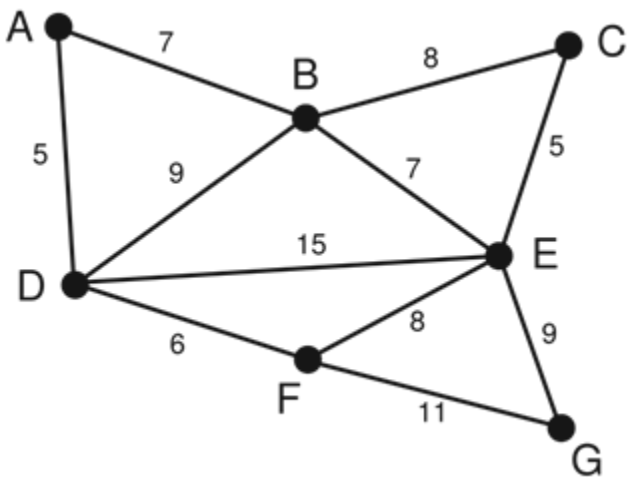
Realita nie sú grafy ...

- **Reálne vzťahy nie sú „boolean“** – áno/nie
  - máme najlepších priateľov, dobrých priateľov, „iba“ známych...
  - cesta medzi za sebou idúcimi zástavkami MHD trvá rôzne dlho
  - aj keď medzi mestami sú cesty, vzdialenosti medzi mestami sú rôzne

Ako to modelovať?

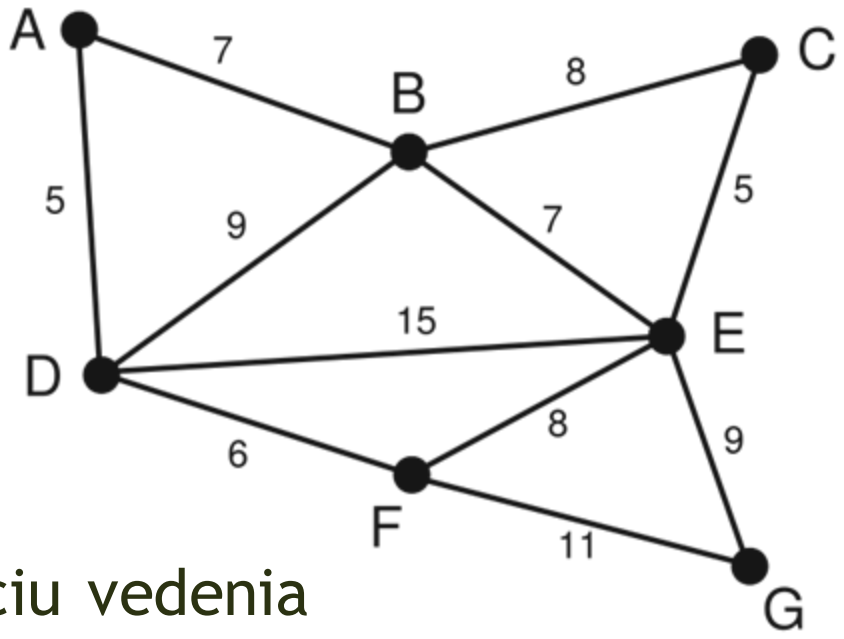
Ohodnotené grafy

- Na vyjadrenie „kvality“ vzťahu medzi dvoma vrcholmi pridáme **ku** každej **hrane** grafu **ohodnotenie**.
- Formálne:
  - **ohodnotený graf** je $G=(V, E, c)$, kde c je je funkcia z množiny hrán E do množiny čísel R, t.j. $c: E \rightarrow R$



Interpretácia ohodnotení

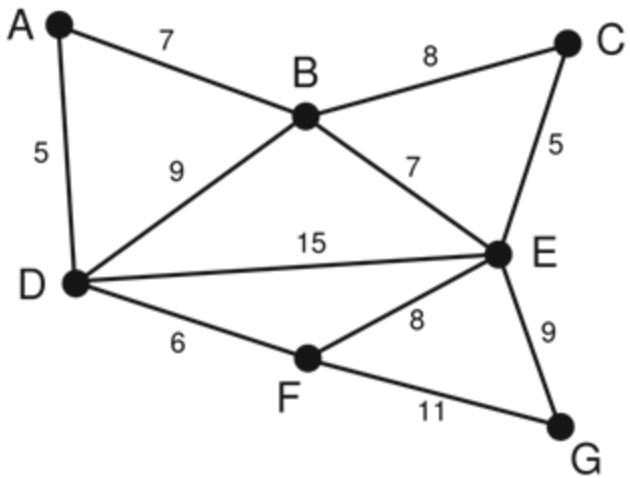
- **Cestná sieť:**
  - dĺžka cesty
  - čas na jej prejdenie
  - šírka cesty
- **Elektrorozvodná sieť:**
  - náklady na rekonštrukciu vedenia
  - prenosová kapacita
- **Sociálna sieť:**
  - ako dlho sa osoby poznajú
  - počet vzájomne poslaných správ



Ako uložiť ohodnotený graf?

- **Matica susednosti**:
  - dvojrozmerné pole čísel + dohodnutá **hodnota na neprítomnosť hrany**
    - dohodnutá hodnota **nemôže byť platným ohodnotením** hrany
    - záporné číslo (-1) ak vieme, že ohodnotenia sú len kladné
    - `Double.`*`POSITIVE_INFINITY`* ekvivalent pre ∞
- V knižnici `PAZGraphs.jar`
  - metóda **`getWeight`** triedy **`Edge`**
- Ďalšie reprezentácie …

Matica susednosti



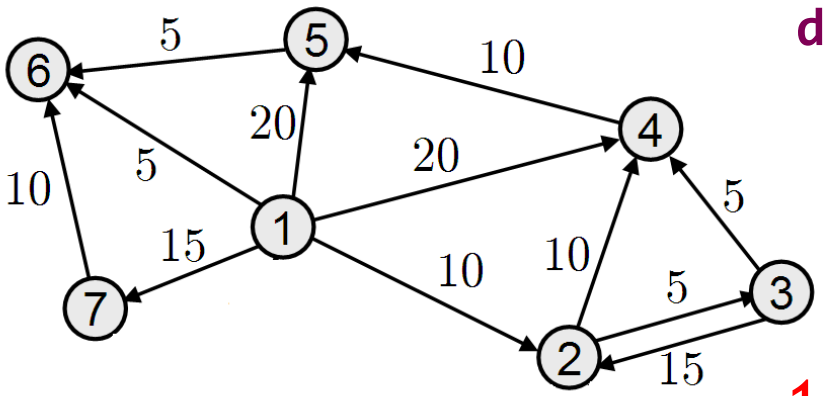

```
Double.POSITIVE_INFINITY = ∞

double[][] graf = new double[7][7]
```

	A	B	C	D	E	F	G
A	∞	7	∞	5	∞	∞	∞
B	7	∞	8	9	7	∞	∞
C	∞	8	∞	∞	5	∞	∞
D	5	9	∞	∞	15	6	∞
E	∞	7	5	15	∞	8	9
F	∞	∞	∞	6	8	∞	11
G	∞	∞	∞	∞	9	11	∞

graf[u][v] = ohodnotenie hrany medzi **u** a **v**, resp. ∞ ak hrany niet

Ohodnotené orientované grafy



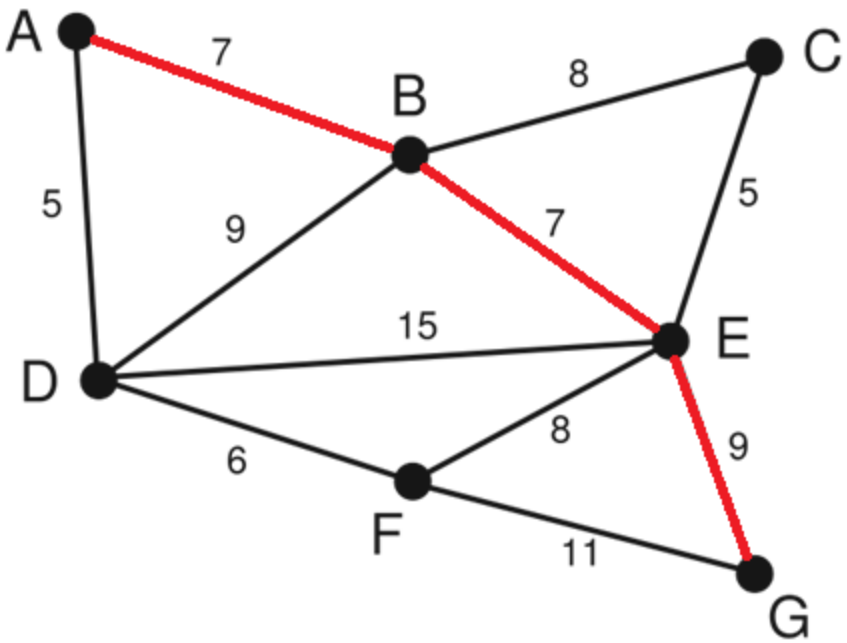

```
double[][] graf = new double[7][7]
```

	1	2	3	4	5	6	7
1	∞	10	∞	20	20	5	15
2	∞	∞	5	10	∞	∞	∞
3	∞	15	∞	5	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	∞	10	∞	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	5	∞
6	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
7	∞	∞	∞	∞	∞	10	∞

graf[u][v] = ohodnotenie hrany z **u** do **v**, resp. ∞ ak hrany niet

Ohodnotené cesty v grafoch

- Cesta „neformálne“:
  - **postupnosť vrcholov** grafu **bez opakovania**, v ktorej každé dva **za sebou** idúce vrcholy sú **spojené hranou**
- **Ohodnotenie cesty**:
  - súčet ohodnotení hrán tvoriacich cestu
  - označujeme aj ako „cena“ cesty alebo „dĺžka“ cesty
- Príklad:
  - $c(ABEG) = c(AB)+c(BE)+c(EG) = 7+7+9 = 23$

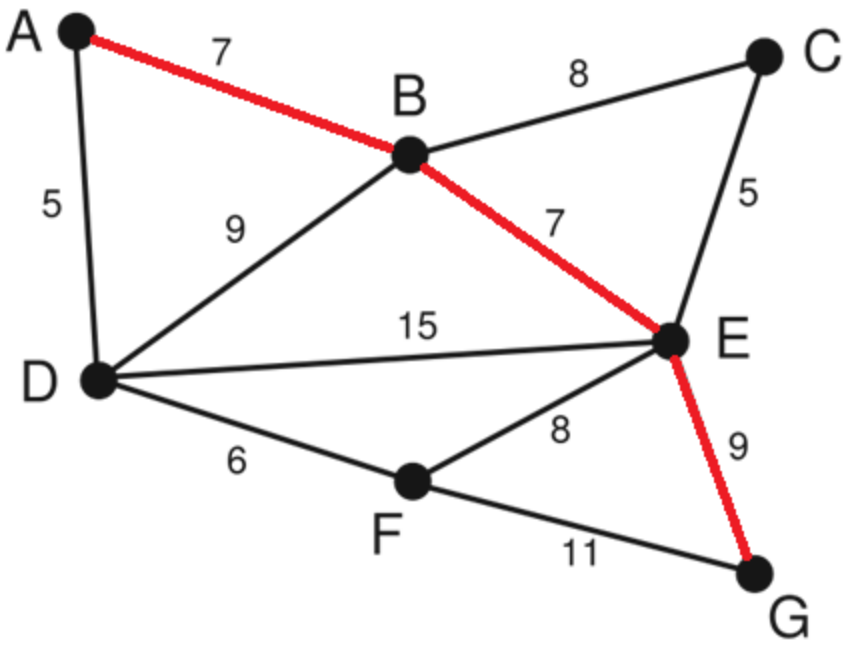


Interpretácia ohodnotených ciest

- $c(AB)+c(BE)+c(EG) = 7\ km + 7\ km + 9\ km = 23\ km$
- $c(AB)+c(BE)+c(EG) = 7\ min + 7\ min + 9\ min = 23\ min$
- $c(AB)+c(BE)+c(EG) = 7\ € + 7\ € + 9\ € = 23\ €$

Dá sa z **A** do **G** dostať za menej ako 23 minút?

Dá sa z **A** do **G** dostať za lacnejšie ako 23 €?



Problém najkratšej cesty

- **Praktické aplikácie:**
  - GoogleMaps
  - GPS navigácia
  - Cestovné spojenia (MHD, autobusy, vlaky, lietadlá)
- **Otázky:**
  - Aká je najkratšia cesta z Medickej na Jesennú?
  - Kde je najbližšia reštaurácia? Ako sa tam dostanem?
  - Zoznam všetkých čerpacích staníc do 20 km cesty.
  - Aká je aktuálne najrýchlejšia cesta z KE do BA?
  - Aká je najlacnejšia letenka z KE do Silicon Valley?

Problém najkratšej cesty

- **ohodnotený orientovaný graf** popisujúci „cestnú“ sieť
  - ak je neorientovaný graf, každú hranu pridáme ako dva šípy
- počiatočný vrchol – štart
- koncový vrchol – cieľ
- hľadáme takú **orientovanú cestu** zo štartového vrcholu do cieľového vrcholu, že jej **cena** (**ohodnotenie**, **dĺžka**, ...) **je minimálna**
  - v porovnaní s BFS neminimalizujeme počet hrán, ale súčet ohodnotení hrán tvoriacich cestu:
    - priamy autobus Prešov – Londýn (1 hrana) vs. autobus Prešov – Košice, letecky Košice – Viedeň a Viedeň - Londýn (3 hrany)

Dôležité!!!

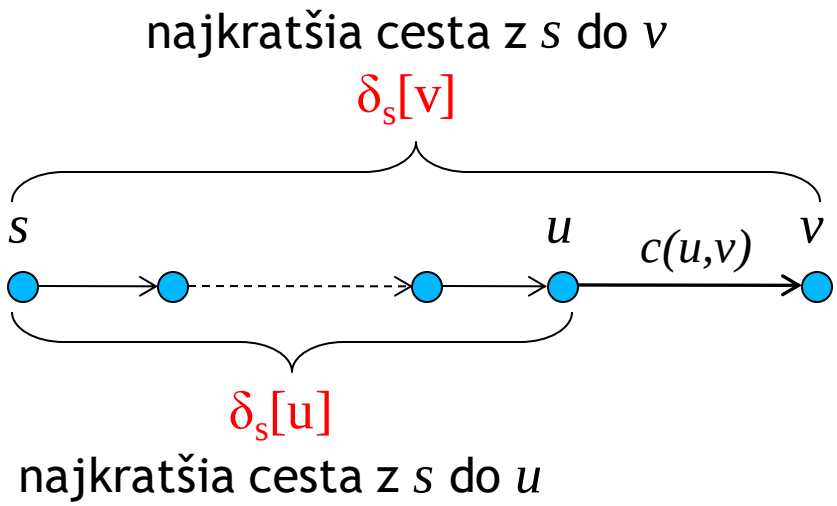
Ako nájsť najkratšiu (najlacnejšiu) cestu v grafe?

Ako začať?

- Inšpirácia v dynamickom programovaní?
  - riešime všeobecnejší problém...
  - kopa úvah, ktorá skončí nakoniec pár cyklami...
- **Hľadajme dĺžku najkratšiej cesty** zo štartovacieho vrcholu do **všetkých** vrcholov grafu
  - označme $\delta_s[u]$ dĺžku najkratšej cesty zo štartovacieho vrcholu **s** do vrcholu **u**
  - po vypočítaní $\delta_s[u]$ pre všetky vrcholy **spätným prehľadávaním** nájdeme cestu (viac na cvičeniach)
    - **najkratších ciest** do vrcholu **môže byť viacero**, všetky ale majú rovnaké ohodnotenie („dĺžku“), ktoré je **najmenšie možné**

Pozorovanie 1

- Ak $sPuv$ je **najkratšia** cesta z **s** do **v**, potom sPu je najkratšia cesta z **s** do **u**.



Dôsledok:
Ak **u** je susedný predchodca **v** na najkratšej ceste z **s** do **v**, potom:

$$\delta_s[u] + c(u, v) = \delta_s[v]$$

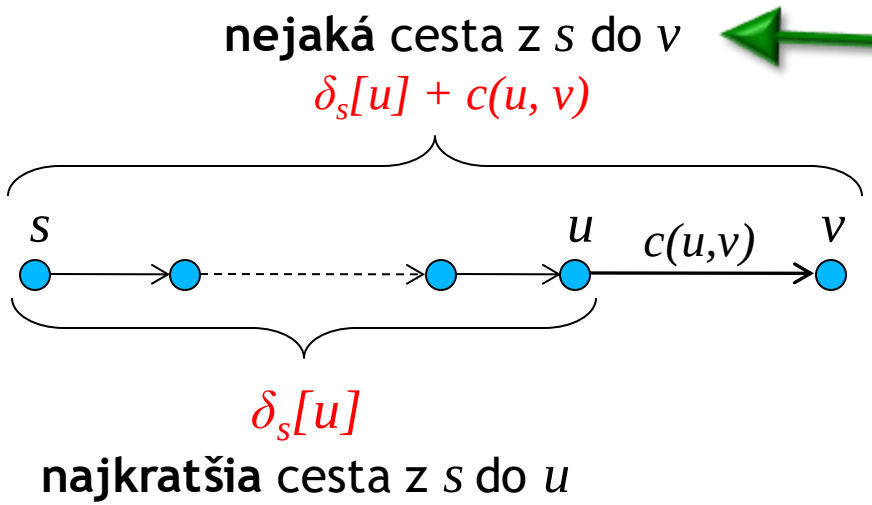
Sporom: Ak by existovala kratšia cesta z **s** do **u**, potom jej predlžením o hranu **(u, v)** dostaneme kratšiu cestu z **s** do **v** – my sme ale vybrali najkratšiu – spor s optimalitou výberu

Pozorovanie 2

- Pre každú hranu **(u, v)** platí:

$$\delta_s[u] + c(u, v) \geq \delta_s[v]$$

- **Dôkaz:**
  - cesta, ktorá vznikne predĺžením najkratšej cesty z **s** do **u** o hranu **(u, v)** je nejaká cesta z **s** do **v** – preto nemôže byť kratšia ako najkratšia cesta



Každá cesta z **s** do **v** (aj tá cez **u**) je aspoň taká dlhá ako najkratšia cesta:
$\delta_s[u] + c(u, v) \geq \delta_s[v]$

Idea algoritmu

- $\delta_s[v]$ – dĺžka najkratšej cesty z **s** do **v**
  - túto hodnotu nepoznáme...
- $d_s[v]$ - „horný odhad“ dĺžky najkratšej cesty z vrcholu **s** do **v**
  - nejaké číslo, *ktoré zodpovedá dĺžke nejakého sledu (cesta, kde je dovolené opakovanie vrcholov) z **s** do **v***
  - udržiavame ho pre každý vrchol grafu
  - chceme ho postupne zlepšovať (zmenšovať)

$$\delta_s[v] \leq d_s[v]$$

Žiaden horný odhad dĺžky najkratšej cesty nemôže byť menší ako skutočná dĺžka najkratšej cesty.

Idea algoritmu

- $\delta_s[v]$ – dĺžka najkratšej cesty z **s** do **v**
- $d_s[v]$ - „odhad“ dĺžky najkratšej cesty z **s** do **v**
  - chceme, aby stále platiť podmienka:

$$\delta_s[v] \leq d_s[v]$$

Invariant: podmienka, ktorá stále platí... ... aj keď jej platnosť nemáme ako overiť.

Invariant je určite splnený, aj keď nepoznáme $\delta_s[v]$

Na začiatku algoritmu:

$$d_s[s] = 0$$

$$d_s[v] = \infty, \text{ ak } s \neq v$$

Zlepšovanie odhadu?

- Moje odhady (splňajúce invarianty):
  - Košice -> Liptovský Mikuláš: 2000 km
  - Košice -> Poprad: 800 km

Z Popradu do Liptovského Mikuláša je diaľnica dlhá 60km

- Moje nové odhady:
  - Košice -> Liptovský Mikuláš: **860** km
  - Košice -> Poprad: 800 km

Zlepšovanie odhadu?

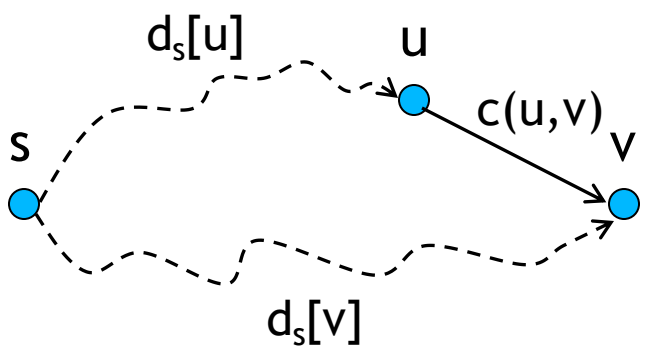
- Moje odhady (splňajúce invarianty):
  - Košice -> Liptovský Mikuláš: 830 km
  - Košice -> Poprad: 800 km

- Moje nové odhady (informácia nepomohla):
  - Košice -> Liptovský Mikuláš: **830** km
  - Košice -> Poprad: **800** km

Relaxácia hrany

- Operácia relaxácie hrany $e=(u, v)$:

```
Relax(u, v):
    if (ds[u] + c(u, v) < ds[v])
        ds[v] = ds[u] + c(u, v)
```



Intuícia:
Ak cesta z **s** do **u** a orientovaná hrana **(u, v)** vytvoria kratšiu cestu z **s** do **v**, ako máme, tak si môžeme zlepšiť odhad najkratšej cesty z **s** do **v** – máme lepšiu cestu z **s** do **v**.

Ostane invariant $\delta_s[v] \leq d_s[v]$ zachovaný?

Relaxácia zachováva invariant

Pozorovanie 2: $\delta_s[u] + c(u, v) \geq \delta_s[v]$

Invariant pre vrchol u: $\delta_s[u] \leq d_s[u]$

Invariant môže prestať pre vrchol v platiť, ak sa vykoná **if**:
po jeho vykonaní `d_s[v]=d_s[u]+c(u, v)`

Tvrdenie: relaxácia zachováva platnosť invariantu

$$\delta_s[v] \leq \delta_s[u] + c(u, v) \leq d_s[u] + c(u, v) = d_s[v]$$

Pozorovanie 2

Platnosť invariantu pre vrchol **u**:
$\delta_s[u] \leq d_s[u]$

Ak nastalo **priradenie** relaxácie, potom po jeho vykonaní platí:
$d_s[v] = d_s[u] + c(u, v)$

Úvahy pokračujú...

- Vrchol **v** nazveme *vybaveným*, ak $\delta_s[v] = d_s[v]$
  - na začiatku je iba štartovací vrchol **s** vybavený

- **Tvrdenie:** Ak $sPuv$ je najkratšia cesta z **s** do **v** a vrchol **u** už je *vybavený*, tak po relaxácii hrany **(u, v)** sa stane vrchol **v** *vybaveným*.

Dôkaz namiesto sľubov...

Úvahy pokračujú (dôkaz)...

Pozorovanie 1

- Fakty:
  - *sPuv* je <u>najkratšia</u> cesta z **s** do **v**: $\delta_s[u] + c(u, v) = \delta_s[v]$
  - vrchol **u** už je *vybavený*: $\delta_s[u] = d_s[u]$
  - invariant pre **v**: $\delta_s[v] \leq d_s[v]$
  - po skončení relaxácie **(u, v)**: $d_s[v] \leq d_s[u] + c(u, v)$

$$\underbrace{d_s[v] \leq d_s[u] + c(u, v) = \delta_s[u] + c(u, v) = \delta_s[v]}$$

$$\left.\begin{array}{l} d_s[v] \leq \delta_s[v] \\ \\ \delta_s[v] \leq d_s[v] \end{array}\right\} \delta_s[v] = d_s[v]$$

v je vybavený

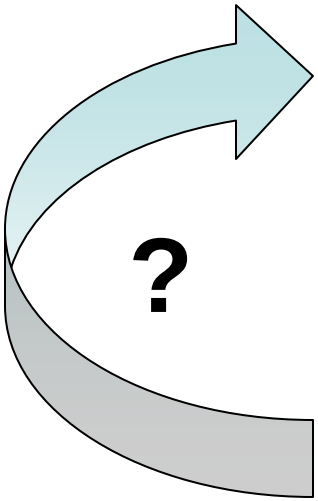
O správnom poradí relaxácií

- Nech **(s, v_1), (v_1, v_2), …, (v_{k-1}, v)** je postupnosť hrán najkratšej cesty z **s** do **v**:
  - **s** je vybavený, po relaxácií **(s, v_1)** je **v_1** *vybavený*
  - po tom, čo **v_1** je *vybavený*, po relaxácii **(v_1, v_2)** je **v_2** *vybavený*
  - …
  - po tom, čo **v_{k-1}** je *vybavený*, po relaxácii **(v_{k-1}, v)** je **v** *vybavený*

- **Záver:** správna postupnosť relaxácií hrán garantuje, že všetky vrcholy sa stanú *vybavené*.

Ako to všetko využiť?

- **Kľúčový fakt:** Ak u je vybavený a hrana (u, v) je na najkratšej ceste z s do v, po relaxovaní hrany (u, v) bude vrchol v vybavený.
- Vrchol s je na začiatku vybavený.



Ak zrelaxujeme každú orientovanú hranu v grafe, čo vieme povedať o množine vybavených vrcholov?

Vybavené budú tie vrcholy, do ktorých vedie najkratšia cesta tvorená len jednou hranou (dĺžky 1).

Algoritmus Bellman–Ford

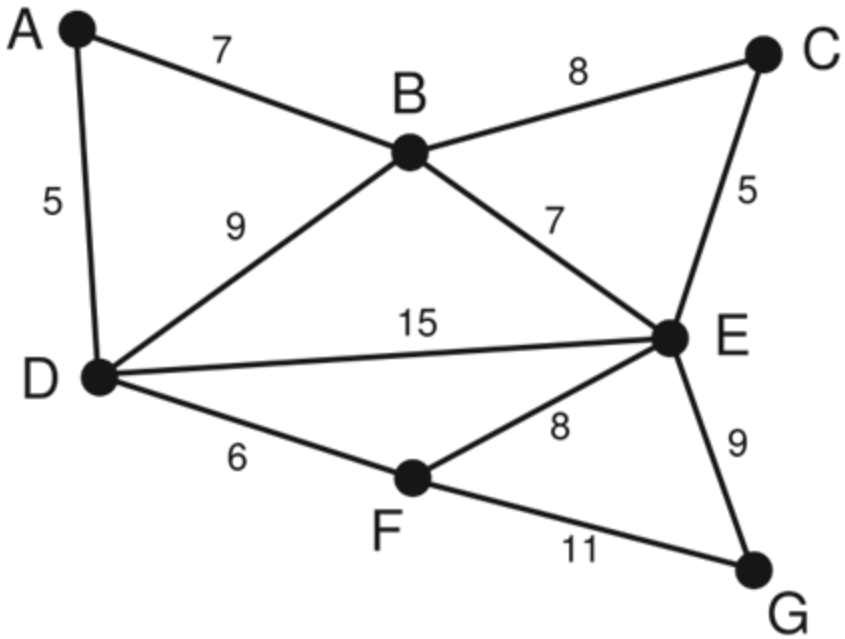
```
for (v: vrcholy G) {
  d_s[v] = ∞;
}
d_s[s] = 0;

for (int i=0; i<n; i++)
  for (Edge e: graph.getEdges())
    relax(e);
```

Intuícia:
V rámci každej fázy algoritmu skúsime zrelaxovať všetky hrany grafu. Zrealizujeme celkom **n** fáz.

Dôkaz intuitívne:
Po i-tej fáze sa stanú vybavené všetky také vrcholy, že najkratšia cesta zo štartovacieho vrcholu **s** do nich sa skladá z **i** hrán. Formálny dôkaz indukciou...

Bellman-Ford z vrcholu A



A	B	C	D	E	F	G
0	7	15	5	14	11	22

Bellman-Ford v Jave

```
public void relax(Edge e, Map<Vertex, Double> d) {
   Vertex u = e.getSource();
   Vertex v = e.getTarget();
   if (d.get(u) + e.getWeight() < d.get(v))
       d.put(v, d.get(u) + e.getWeight());
}

public Map<Vertex, Double> bellmanFord(Graph g, Vertex s) {
   Map<Vertex, Double> d =
                g.createVertexMap(v, Double.POSITIVE_INFINITY);
   d.put(s, 0d);

   for (int i = 0; i < g.getVertices().size(); i++)
       for (Edge e : g.getEdges())
           relax(e, d);

   return d;
}
```

Algoritmus Bellman–Ford

- **Intutívne zdôvodnenie:**
  - Využitý fakt: ak predposledný vrchol na najkratšej ceste je *vybavený*, tak relaxáciou poslednej hrany sa stane posledný vrchol cesty *vybavený*.
  - Po i-tej relaxácii všetkých hrán grafu sú *vybavené* všetky vrcholy, do ktorých vedie najkratšia cesta skladajúca sa z i hrán.
  - Po (i+1)-tej relaxácii všetkých hrán grafu sú *vybavené* všetky vrcholy, do ktorých vedie najkratšia cesta skladajúca sa z i+1 hrán. Tieto vrcholy **musia mať suseda**, do ktorého je najkratšia cesta z i hrán – na základe indukčného predpokladu, je ten už vybavený.

Algoritmus Bellman–Ford

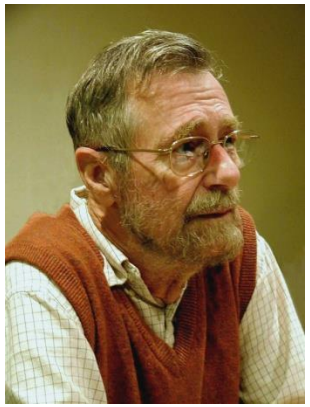
- **Časová zložitosť** pri grafe s n vrcholmi a m hranami:
  - relaxácia jednej hrany $O(1)$
  - v každej fáze relaxujeme všetky hrany $m.O(1) = O(m)$
  - celkovo máme n fáz: $n.O(m) = O(n.m)$
- V grafoch je $m = O(n^2)$
  - časová zložitosť vzhľadom na n: $\boldsymbol{O(n^3)}$
- Výhoda:
  - nájdeme najkratšiu cestu z **s** do všetkých vrcholov

Dijkstrov algoritmus (1959)

- Funguje **len** v prípadoch, kedy sú **ohodnotenia hrán nezáporné**
- Chytrejším výberom hrán na relaxáciu sa získa časová zložitosť $O(n^2)$
  - algoritmus bude vybavovať vrcholy v rastúcej postupnosti dĺžok najkratších ciest – možnosť ukončiť algoritmus ihneď, ako máme to, čo hľadáme
- Autor:

  Edsger Wybe Dijkstra

  (Holandsko, 1930-2002)



Dijkstrov algoritmus

```
ds[s] = 0;
for (v: vrcholy G okrem s)
    ds[v] = ∞;

Q = vrcholy G;
while (!Q.isEmpty()) {
    vyber v z Q taký, že
        ds[v] = min{ds[u]|u patrí do Q}

    for (w: susedia vrcholu v)
        relax(v, w);
}
```

Q je množina „zatiaľ nevybavených“ vrcholov

Zrelaxujeme všetky hrany vychádzajúce z v

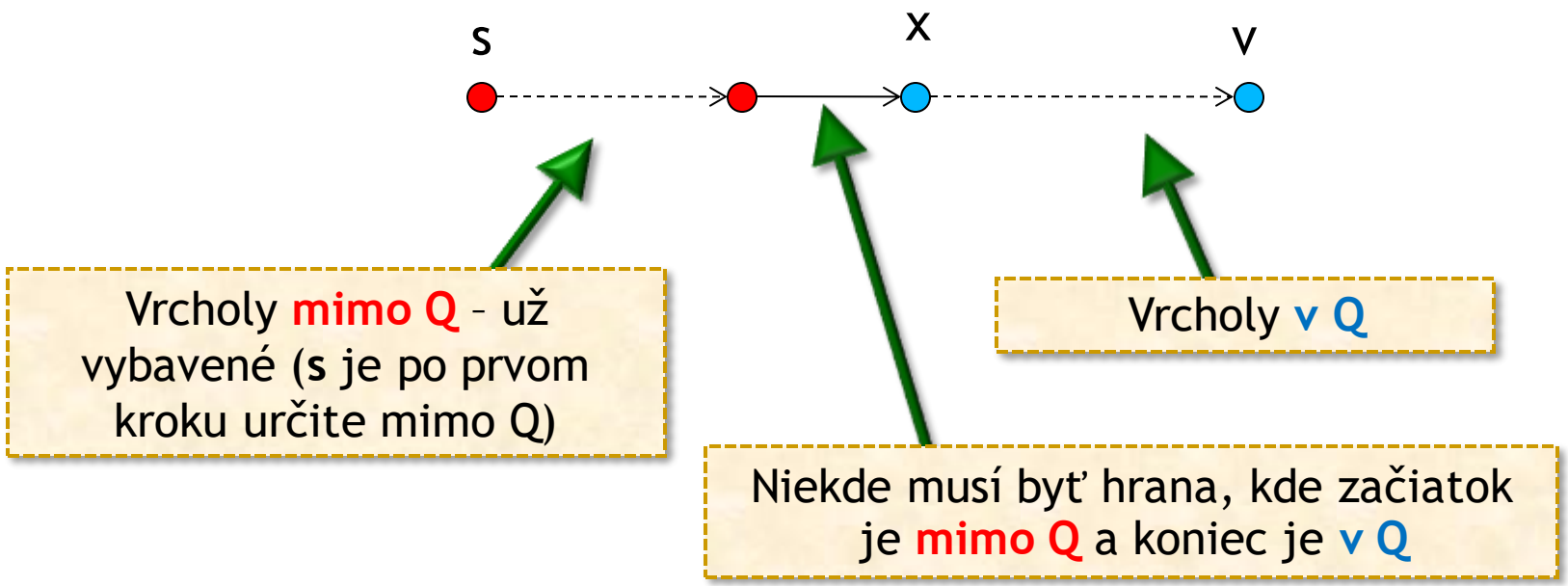
Invariant Dijkstrovho alg. (1)

- **Invariant:**
  - pre každý vrchol mimo Q platí, že je *vybavený* a všetky z neho vychádzajúce hrany boli relaxované až po tom, čo bol *vybavený*.
  - ak dokážeme, že každý vrchol odchádzajúci z Q je vybavený už pri svojom odchode z Q, zelená časť invariantu vyplýva z algoritmu
- **Dôkaz** (sporom):
  - nech **v** je prvý vrchol mimo **Q**, pre ktorý neplatí invariant, a v dobe, keď opúšťal **Q**, bol nevybavený, t.j. $\delta_s[v] < d_s[v]$.

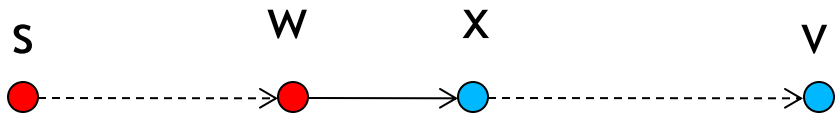
Invariant Dijkstrovho alg. (2)

Dôkaz (pozrime sa na okamih, keď **v** opúšťal **Q**):

Keďže **v** nie je *vybavený*, existuje **kratšia** (najkratšia) cesta z **s** do **v**, v ktorej sa nachádza nejaký vrchol z **Q** – nech **x** je prvý taký vrchol na tejto ceste.



Invariant Dijkstrovho alg. (3)



- keďže **x** je prvý na ceste platí (invariant pre **w** a Pozorovanie 1), že **x** je vybavený $d_s[x] = \delta_s[x]$
- z nezápornosti cien: $\delta_s[x] \leq \delta_s[v]$
- invariant relaxácie: $\delta_s[v] \leq d_s[v]$
- minimalita **v** medzi vrcholmi z **Q**: $d_s[v] \leq d_s[x]$

$$d_s[x] = \delta_s[x] \leq \delta_s[v] \leq d_s[v] \leq d_s[x]$$

dôsledok: $\delta_s[v] = d_s[v]$, t.j., ***v* je vybavený**

Poznámky k „Dijsktrovi“

- Časová zložitosť $O(n^2)$:
  - **while** cyklus je vykonaný n-krát
  - v tele cyklu:
    - $O(n)$ na nájdenie vrcholu v s minimálnym $d_s[v]$
    - $O(n)$ na relaxáciu hrán vychádzajúcich z v
- Vizualizácia:
  - http://cam.zcu.cz/~rkuzel/aplety/Dijkstra/Dijkstra.html
  - http://www.cs.auckland.ac.nz/software/AlgAnim/dijkstra.html
  - http://www.unf.edu/~wkloster/foundations/DijkstraApplet/DijkstraApplet.htm

Floyd-Warshallov algoritmus

- Algoritmus na nájdenie **najkratšej cesty** medzi **každými 2 vrcholmi grafu**
  - založený na dynamickom programovaní
- **Vstup:**
  - ohodnotený orientovaný graf s vrcholmi číslovanými od 1 po n
- **Výstup**
  - matica d[i, j], ktorá pre každú dvojicu vrcholov **i** a **j** obsahuje dĺžku najkratšej cesty medzi týmito vrcholmi

Floyd-Warshal a dynamika

- d[i, j, k] – dĺžka najkratšej cesty z i do j, ktorá **používa len vrcholy 1..k**
  - metafora…

- Triviálne prípady:
  - d[i, j, 0] = c(i, j), ak (i, j) je hrana grafu
  - d[i, j, 0] = ∞, inak
- Zaujíma nás d[i, j, n] = d[i,j]

Charakterizácia problému

$$d[i, j, k] = min\{d[i, j, k\text{-}1], d[i, k, k\text{-}1] + d[k, j, k\text{-}1]\}$$

Dĺžka najkratšej cesty z **i** do **j** pri ktorej máme dovolené navštíviť len vrcholy **1..k**.

Máme dve možnosti: táto cesta alebo **obsahuje** alebo **neobsahuje** vrchol **k**

Dĺžka najkratšej cesty z **i** do **j** pri ktorej máme dovolené navštíviť len vrcholy **1..k-1**

Ak najkratšia cesta z **i** do **j** cez vrcholy **1..k** obsahuje mesto **k**, potom cestu môžeme rozdeliť na dve podcesty:
z **i** do **k** cez vrcholy **1..k-1** a
z **k** do **j** cez vrcholy **1..k-1**

Pozorovania

$$d[i, j, k] = min\{d[i, j, k\text{-}1], d[i, k, k\text{-}1] + d[k, j, k\text{-}1]\}$$

Pozorovania:

- na zlepšenie hodnoty d[*, *, k] potrebujeme iba hodnoty tvaru d[*, k, k-1], d[k, *, k-1]
- d[*, k, k] = d[*, k, k-1], d[k, *, k] = d[k, *, k-1]
  - možnosť použiť vrchol **k** ako medzivrchol nepomôže nájsť lepšiu cestu s koncom vo vrchole **k**

Dôsledok:

nepotrebujeme 3-rozmerné pole, stačí 2-rozmerné

Floyd-Warshall v Jave

Iniciálne d[i, j] obsahuje:

- c(i, j) - cenu hrany z **i** do **j**, ak existuje
- `Double.POSITIVE_INFINITY`, ak neexistuje

Časová zložitosť: $O(n^3)$

```
for (int k=0; k<vrcholy.length; k++)
    for (int i=0; i<vrcholy.length; i++)
        for (int j=0; j<vrcholy.length; j++)
            if (d[i][k] + d[k][j] < d[i][j])
                d[i][j] = d[i][k] + d[k][j];
```

Sumarizácia

- Ohodnotené grafy na lepšie zachytenie sveta...
- Hľadanie najkratších ciest (B-F, Dijkstra):
  - spoločné myšlienky:
    - postupne zlepšujeme horný odhad dĺžky najkratšej cesty do každého vrcholu
    - operácia relaxácie hrany na zlepšovanie odhadov
- Hľadanie najkratších ciest (Floyd-Warshall):
  - dynamické programovanie - idea:
    - na začiatku môžeme použiť na cestovanie len priame hrany („bez prestupov“)
    - ako sa zmenia dĺžky najkratších ciest, ak nám niekto dovolí používať nejaký nový vrchol ako „prestup“ na cestách?

ak nie sú otázky...

Ďakujem za pozornosť!