



# Záverečný test

## Zadanie



Ústav informatiky  
Prírodovedecká fakulta  
UPJŠ v Košiciach

Doplňujúce zdrojové kódy sú na stránke predmetu PAZ1b. Funkčnosť každého riešenia musí byť preukázaná spustením na testovacích vstupoch - nespustiteľné riešenia neumožňujú zisk príslušných bodov.

## Hodvábna cesta

S blížiacim sa letom a príchodom prázdnin a dovoleníek rastie záujem o veci, na ktoré nie je čas počas roka. Študenti PF UPJŠ sa rozhodli, že sa v lete vyberú na zahraničnú cestu. Jednou z najznámejších historických ciest je Hodvábna cesta. Počas čítania o tejto ceste narazili na viacero problémov, ktoré sa riešili už v minulosti a skúsili tieto historické problémy formalizovať do modernej podoby.

### Vyschnuté oázy (6+8 bodov, grafové algoritmy)

Putovanie cez púšť je nebezpečné, lebo nedostatok vody môže znamenať to najhoršie. Prechod púšťou je založený na zastávkach pri napájadlách a oázach. Maximálna vzdialenosť, ktorú môže karavána prejsť bez zastavenia v oáze alebo napájadle záleží od mnohých faktorov: druh prepravy (ťavy, kone, peši, ...), množstvo vakov na vodu, náklad, ... Skúsení vodcovia karaván vedia, akú maximálnu vzdialenosť sú schopní prejsť. Na základe tejto vzdialenosti vedia nájsť najkratšiu cestu zo začiatočného do cieľového mesta.



Hľadaním najkratšej cesty problémy nekončia, oáza alebo napájadlo môže medzičasom vyschnúť. Ak z nejakého smeru dlhšie nechodia žiadne karavany, znamená to, že nejaká oáza po ceste vyschla. Preto je nutné použiť takú „druhú najkratšiu cestu“, ktorá s najkratšou cestou nemá okrem začiatku a cieľa žiaden spoločný vrchol.

**Úlohy: (6b)** Implementujte program, ktorý načíta graf, začiatočný a cieľový vrchol z textového súboru a nájde najkratšiu cestu zo začiatočného do cieľového vrcholu, pričom cesta neobsahuje žiadnu hranu dlhšiu ako zadaná hodnota `maximum`.

**(+8b)** Rozšírte program, aby našiel „druhú najkratšiu cestu“, kde „druhá najkratšia cesta“ nemá žiaden spoločný vrchol s najkratšou cestou okrem začiatočného a cieľového vrcholu.

## Stratený vodca karavány (10+6 bodov, backtracking)

V meste Samarkand sa stratil vodca karavány! Preto sa ostatní členovia rozhodli, že ho musia nájsť, aby mohli čím skôr pokračovať v ceste. Ale ako nájsť niekoho v neznámom meste? Najprv získame mapu mesta (graf) a potom na križovatky umiestnime pozorovateľov. Pozorovateľ na križovatke (vo vrchole) vidí všetky ulice križujúce sa na tejto križovatke a aj všetky susedné križovatky (susedné vrcholy). Aby si karavána oddýchla, chcú v meste umiestniť čo najmenej pozorovateľov, ktorí ale zároveň musia vidieť na všetky križovatky (vrcholy). Teda keď vodca karavány príde na ktorúkoľvek z križovatiek, zbadajú ho. Križovatkou nazývame každý vrchol grafu - teda aj so stupňom 1 a 2. Môžete predpokladať, že mapa mesta je reprezentovaná súvislým grafom.



### Úlohy:

**(10b)** Implementujte program, ktorý načíta graf z textového súboru a nájde najmenší možný počet vybraných vrcholov (vrcholov s pozorovateľmi), pričom každý vrchol je vybraný alebo nejaký jeho susedný vrchol je vybraný.

**(+6b)** Množina vybraných vrcholov má navyše tvoriť súvislý podgraf (pozor vo všeobecnosti bude táto úloha vyžadovať viac vybraných vrcholov).

## Na úpäti Himalájí (10 bodov)

Aby sa karavána po hodvábnej ceste dostala do Číny, musela prekonať hory. Keďže je nutné sa vrátiť tou istou cestou naspäť, je nutné vychádzať s miestnym obyvateľstvom čo najlepšie. Nosenie príliš veľa zásob znižuje rýchlosť putovania po horách, tak v každej dedine medzi Samarkandom až Kashgarom sa karavána zastaví a nakúpi zásoby. Aby boli miestni obyvatelia spokojní, tak je nutné všade zaplatiť aspoň minimálnu cenu za zásoby (tá je v každej dedine rovnaká), a navyše, ak sa dedina nachádza vo vyššej nadmorskej výške ako susedná dedina, je nutné zaplatiť aspoň o jednu zlatú mincu viac ako v susednej dedine.



**Úloha:** Na vstupe je zoznam nadmorských výšok horských dedín v poradí, v akom sa nachádzajú na ceste, a minimálna cena za nákup zásob. Vytvorte metódu, ktorá vypočíta, aká je najmenšia suma, ktorú je treba zaplatiť v každej dedine, pričom platí:

- v každej dedine musíme zaplatiť aspoň sumu vo výške minimálnej ceny za nákup,
- ak je dedina vo vyššej nadmorskej výške ako predchádzajúca/nasledujúca dedina, tak v nej musíme zaplatiť aspoň o 1 viac ako v predchádzajúcej/nasledujúcej dedine.

**Poznámka:** Očakávaná časová zložitosť je  $O(n)$ .

## Návrat k midtermu alebo Sex, drogy a rock and roll alebo Svadba, ópium a mugham (6 bodov)

V jednej oblasti miestny raja (čítaj radža) povedal, že nepustí cudzincov cez svoje územie. Ale to karavanu nezastaví! Rozhodli sa preto, že oženia jedného z bohatých členov karavány za niektorú z dám z rajovho dvora. Lenže obyvatelia si veľmi potrpia na rovnosti a hlavne bohatstve. Preto sa môžu brať iba ľudia, ktorých bohatstvo je približne rovnaké. Tak treba vybrať miestnu dámu a člena karavány, ktorých bohatstvo je čo najbližšie, aby sa mohli zosobášiť.



**Úloha:** Naprogramujte metódu, ktorá v čase  $O(n \log n)$  (aj priemernom) nájde, vypíše takú dvojicu čísel, kde prvé číslo je z polä  $m$  a druhé číslo je z polä  $d$ , pričom rozdiel týchto čísel je najbližšie k hodnote nula (hodnota  $|m[i]-d[j]|$  je čo najmenšia). Metóda nesmie modifikovať referencované polia. Akceptovaná je pamäťová zložitosť je  $O(n)$ .

## #KtoSaHraNehneva (10+5 bodov, dynamické programovanie)

Počas svadby sa všetci veselili a začali hrať s miestnymi zaujímavé hry. Jedna z nich, ktorej názov nevedeli vysloviť, ich veľmi zaujala. Pravidlá boli nasledovné: starejší zobral čierne a biele kamene a uložil ich zaradom v rovnakom poradí pred oboch súťažiacich. Každému súťažiacemu dal do ruky zopár ďalších bielych kameňov. Potom súťažiaci menili ľubovoľné čierne kamene v rade za biele kamene z ruky. Víťazom sa stal ten, ktorý mal v rade pred sebou najväčší súvislý úsek bielych kameňov.



**Úloha:** (10b) Naprogramujte metódu, ktorá má na vstupe poradie núl a jednotiek (bielych a čiernych kameňov) a počet jednotiek, ktoré môžeme zameniť za nuly (počet bielych kameňov v ruke). Na výstupe bude najväčší možný počet núl, aký môže byť za sebou po výmene niektorých jednotiek za nuly.

(+5b) Za výpis riešenia po výmene jednotiek za nuly, kde je počet núl najväčší možný.

Akceptované sú len riešenia bežiacie v polynomiálnom čase od počtu kameňov.

**Hint:** Existujú rôzne prístupy. Napr. označme si  $R[i, k]$  dĺžku maximálnej súvislej postupnosti bielych kameňov končiacu v  $i$ -tom kameni, ktorú vieme získať použitím nanajvyš  $k$  výmen čierneho kameňa za biely.