

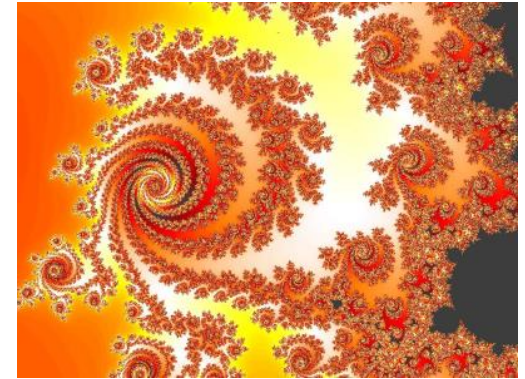


1. prednáška (13.2.2023)

Rekurzia

alebo

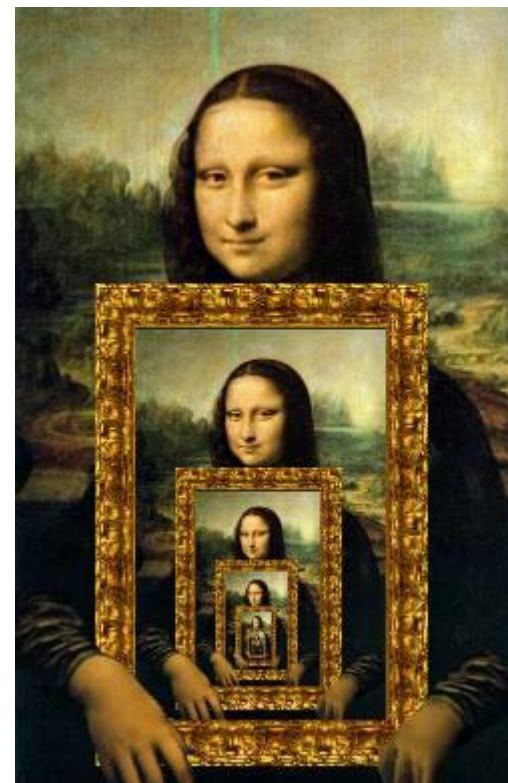
vid' rekurzia





Čo je rekurzia?

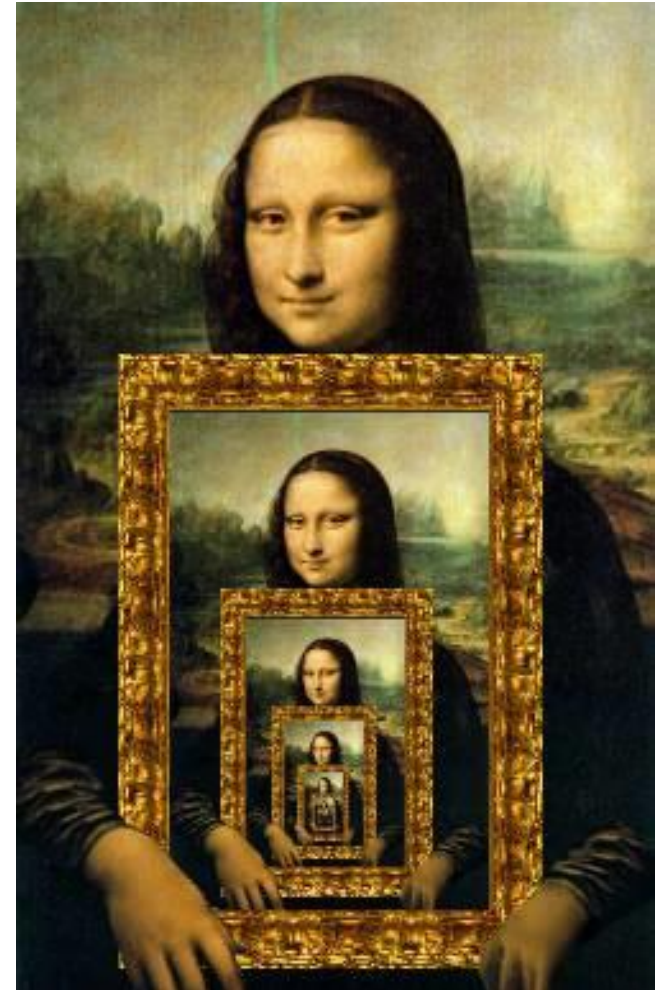
- Rekurzia = **definícia** niečoho pomocou **samého seba** (lat. *recurrere* = bežať naspäť)
- Rekurzia môže mať mnoho podôb:
 - zrkadlá postavené oproti sebe
 - **fraktály**
 - Kochova vložka
 - **rekurzívne definované** postupnosti
 - $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$
 - **rekurzívne funkcie**
 - faktoriál: $n! = n * (n-1)!$
 $0! = 1$





Rekurzia v obraze

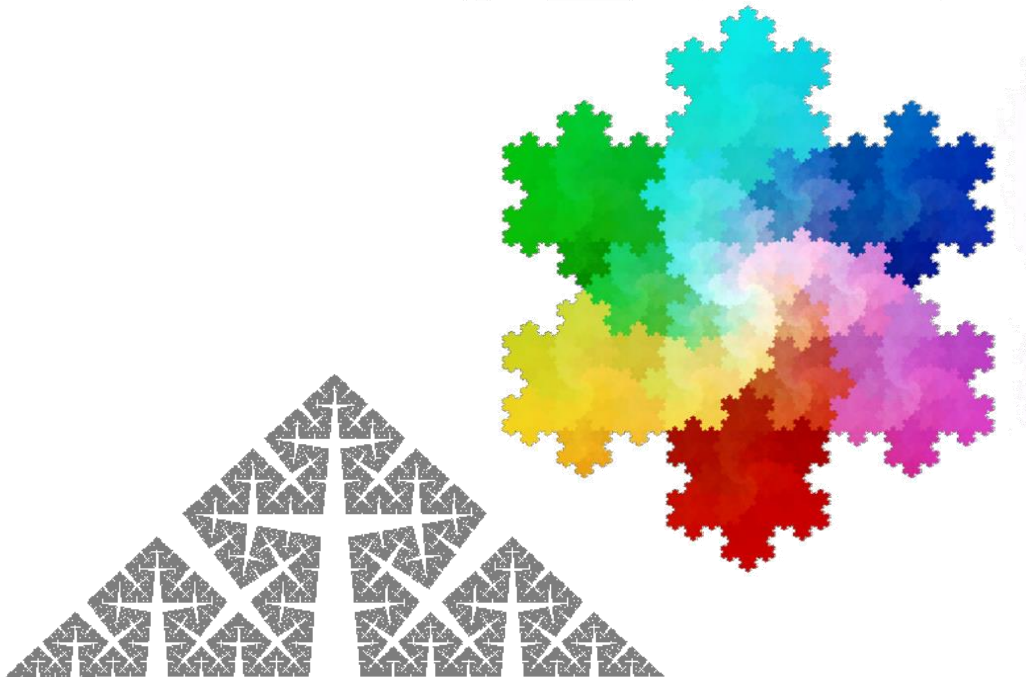
- Ako by sme opísali obraz „Mona Líza s obrazom“?
- Na obraze „Mona Líza s obrazom“ je namalovaná Mona Líza, ktorá drží v rukách obraz „Mona Líza s obrazom“.
- Formálnejšie:
OML je (ML + menší OML)





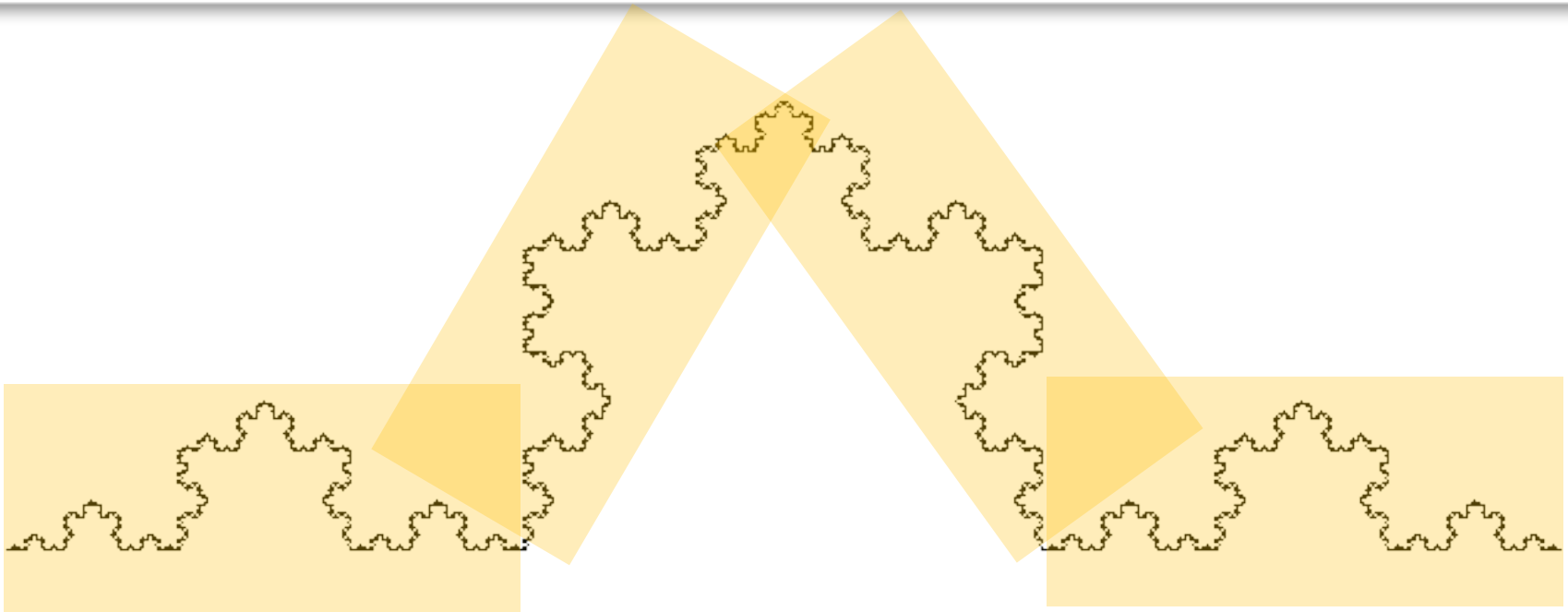
Fraktály

- **Fraktál** je geometrický útvar, ktorý možno rozdeliť **na časti**, z ktorých každá **je zmenšeninou** celého geometrického útvaru.





Kochova krivka (1)

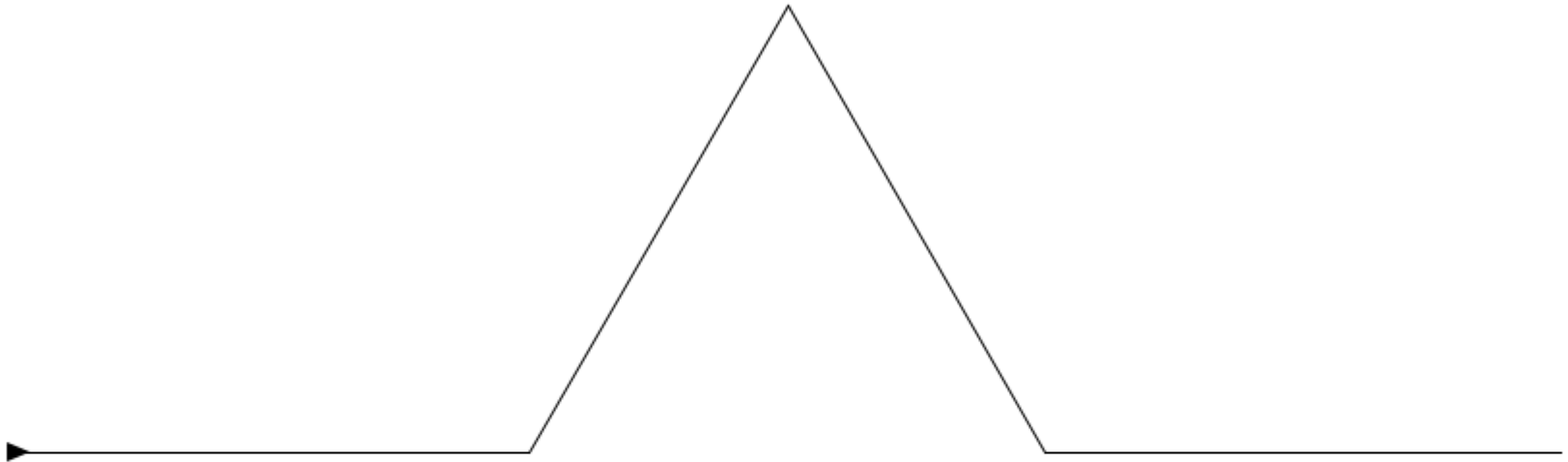


**Kochova krivka sa zkladá zo 4
„menších“ Kochových kriviek.**

„menší“ = menej čiar?, kratšie čiary?, ...

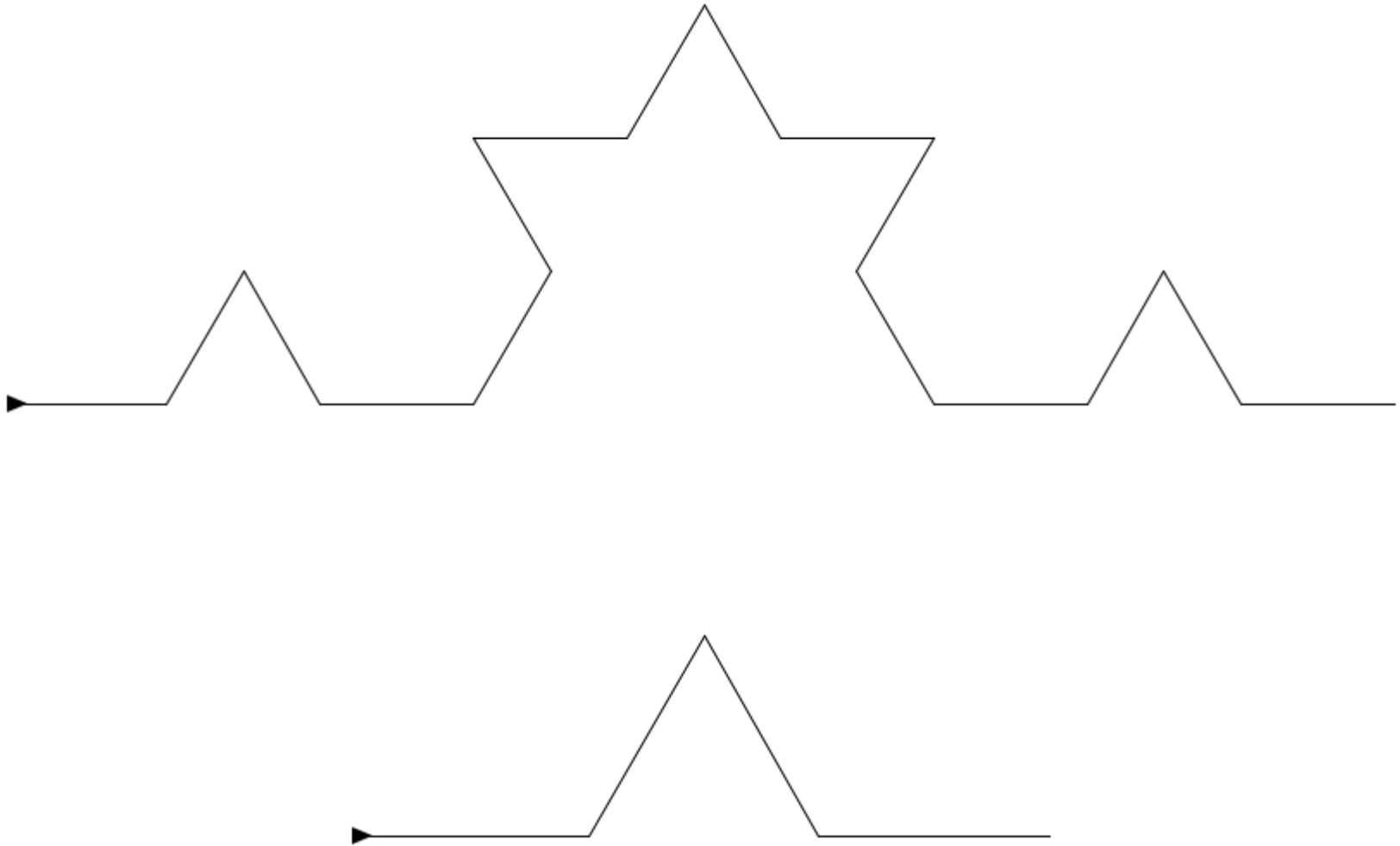


Kochova krivka (2)



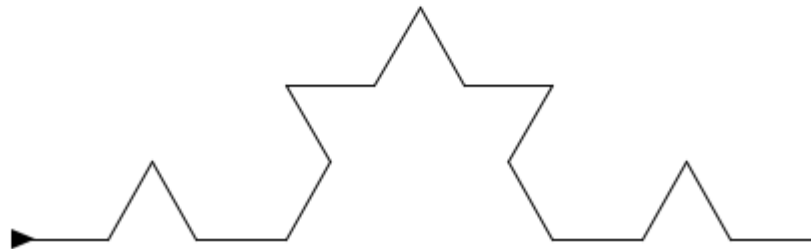
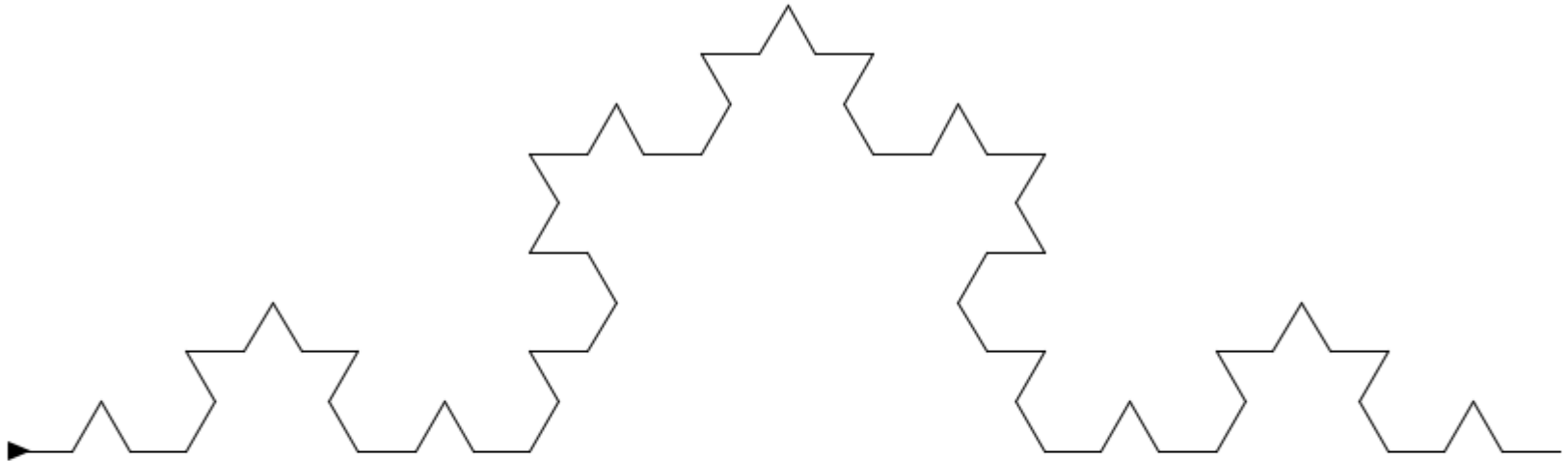


Kochova krivka (2)



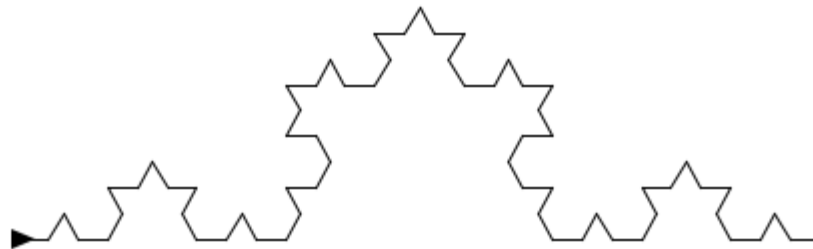
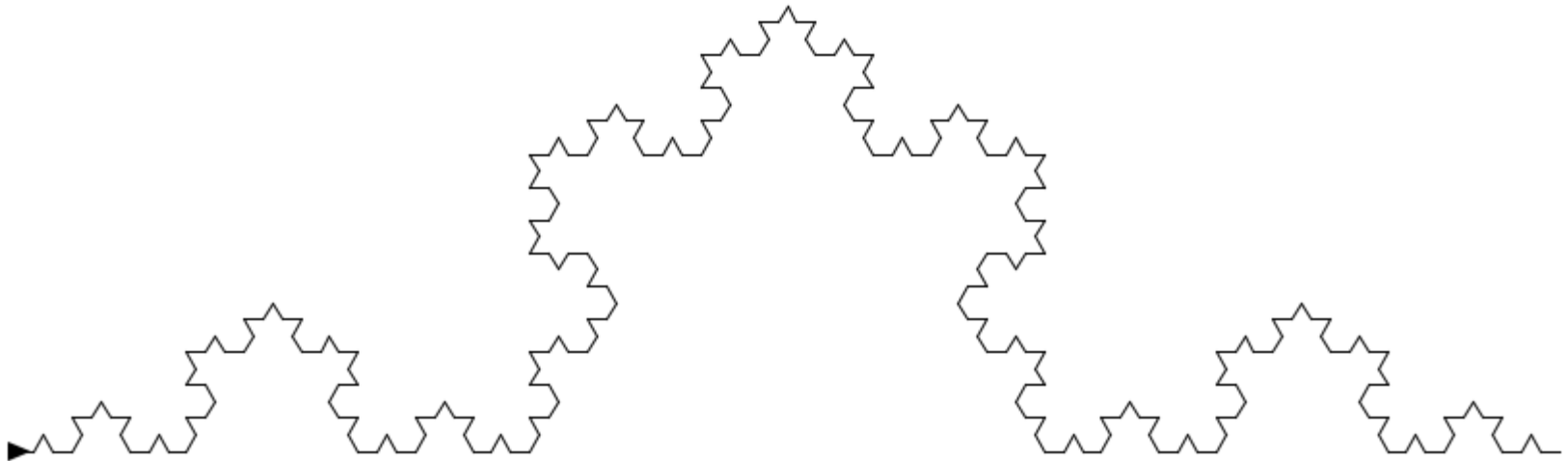


Kochova krivka (2)



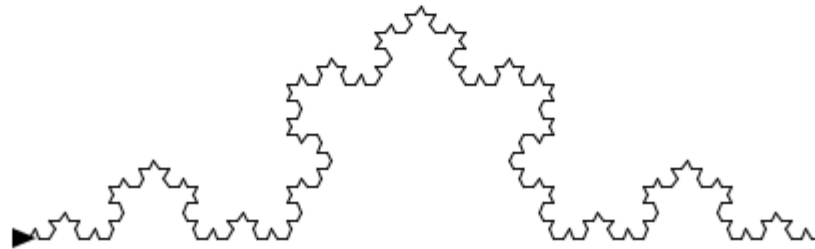
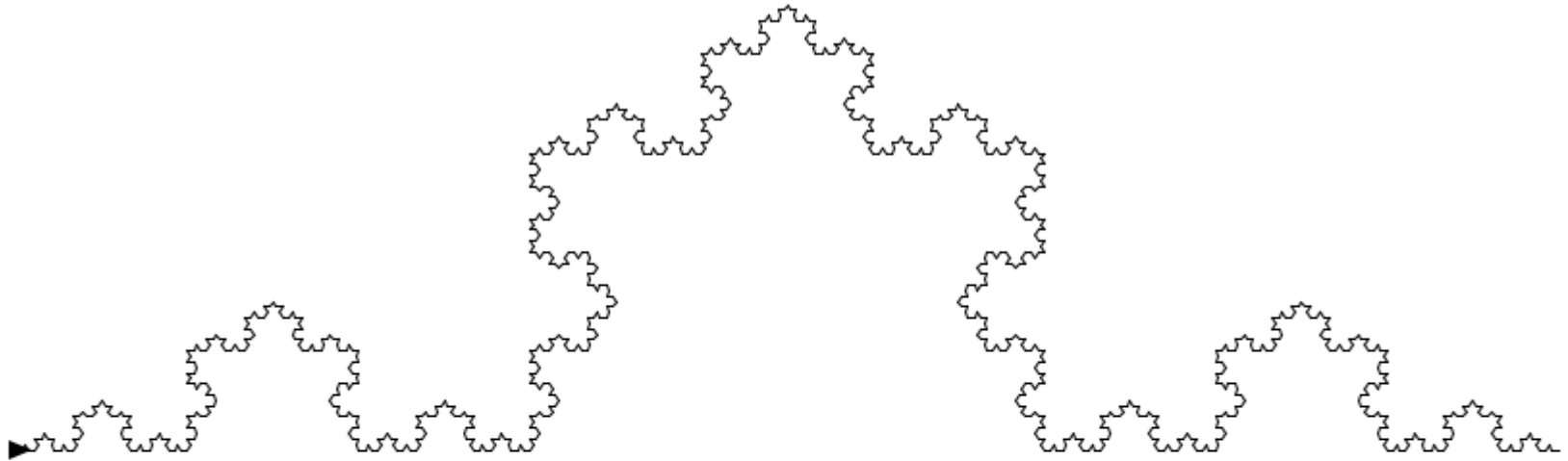


Kochova krivka (2)



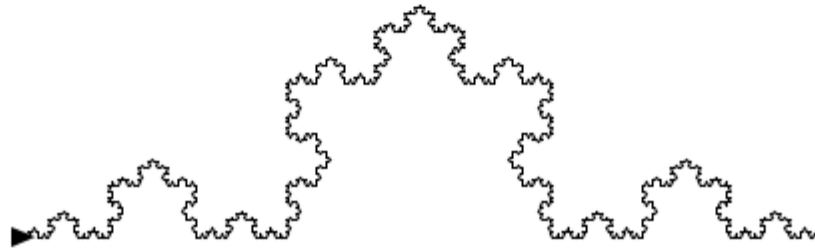
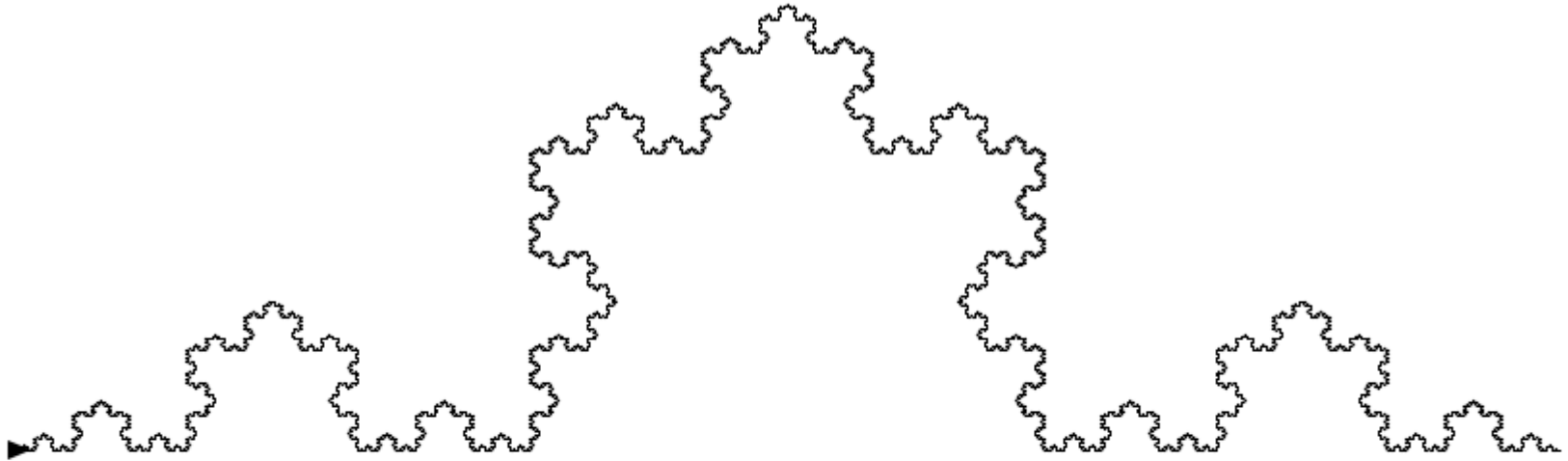


Kochova krivka (2)





Kochova krivka (2)

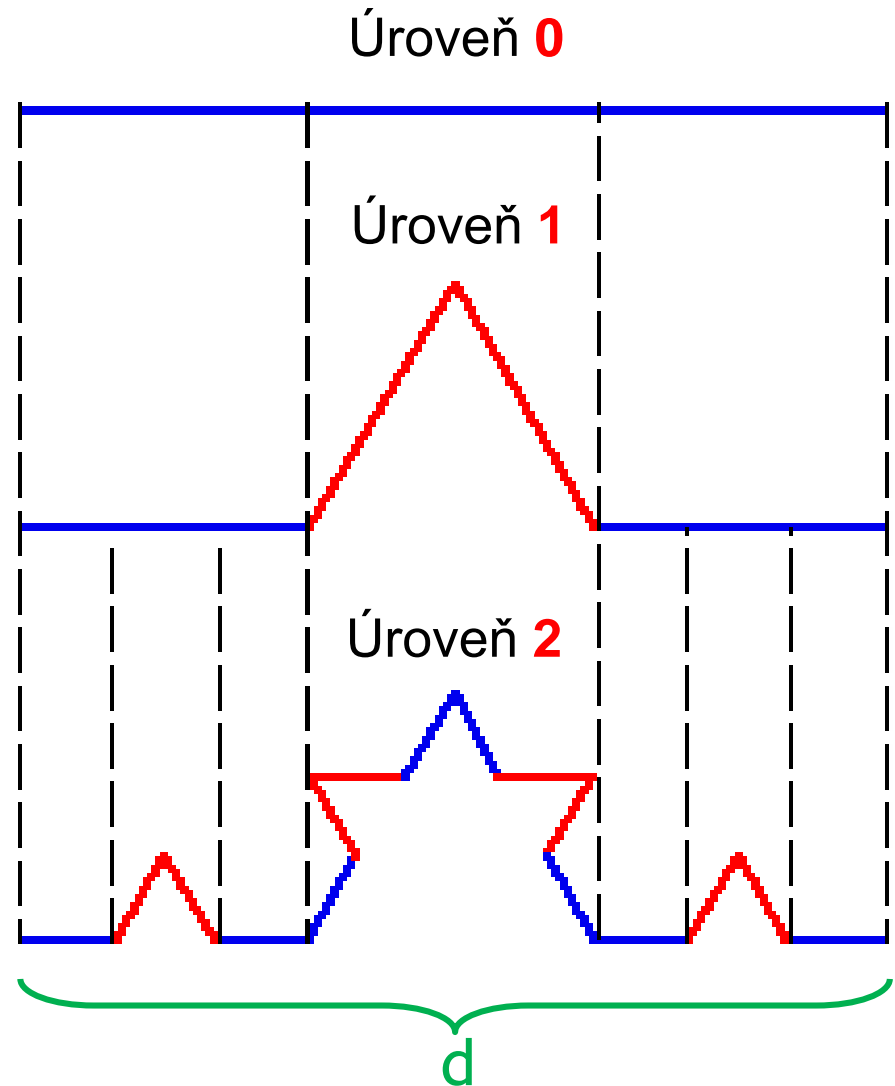




Kochova krivka (3)

```

KK (2, d) {
    KK (1, d/3) ;
    turn (-60)
    KK (1, d/3) ;
    turn (120)
    KK (1, d/3) ;
    turn (-60) ;
    KK (1, d/3) ;
}
  
```



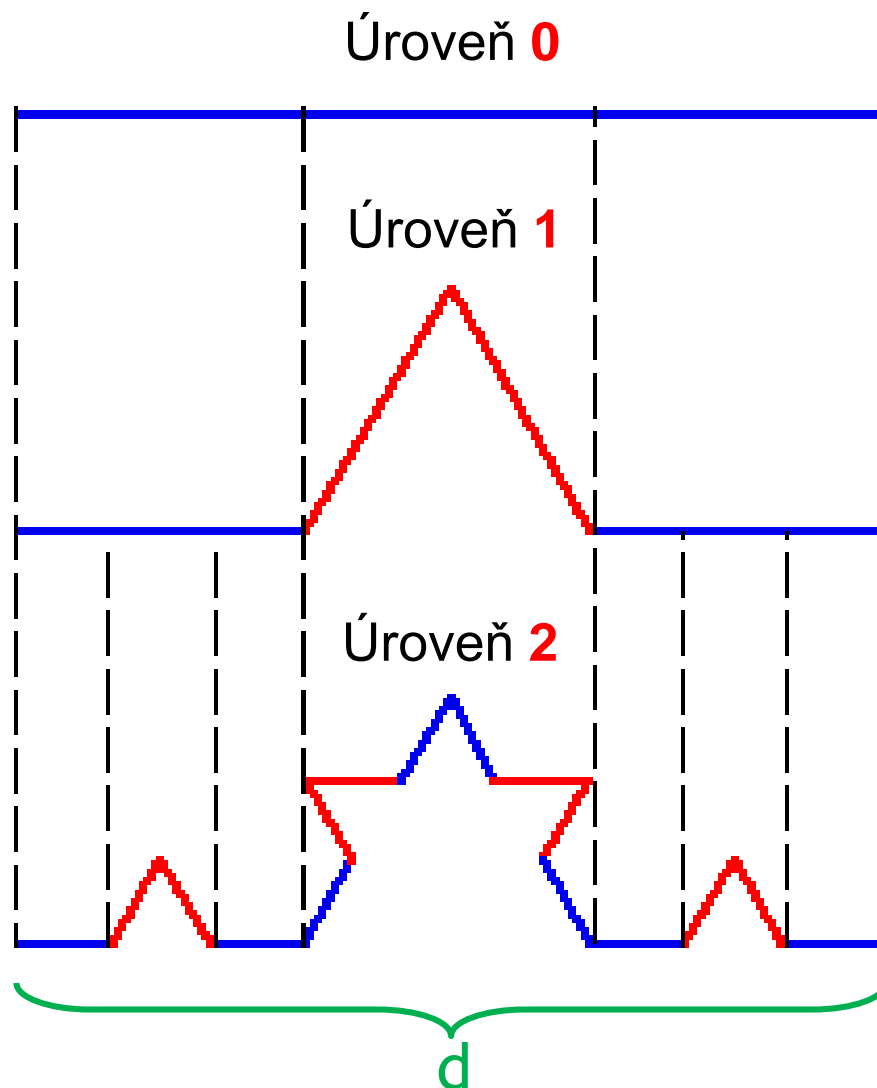


Kochova krivka (3)

Korytnačie príkazy na
nakreslenie krivky
úrovne $u > 0$ a dĺžky d :

```

KK (u, d) {
    KK (u-1, d/3) ;
    turn (-60)
    KK (u-1, d/3) ;
    turn (120)
    KK (u-1, d/3) ;
    turn (-60) ;
    KK (u-1, d/3) ;
}
  
```





Kochova krivka (4)

Korytnačie príkazy na
nakreslenie krivky
úrovne $u > 0$ a dĺžky d :

```

KK (u, d) {
    KK (u-1, d/3) ;
    turn (-60)
    KK (u-1, d/3) ;
    turn (120)
    KK (u-1, d/3) ;
    turn (-60) ;
    KK (u-1, d/3) ;
}
  
```

KK(u, d) je definovaná pomocou **KK(u-1, d/3)**, t.j. Kochova krivka je charakterizovaná Kochovou krivkou.

KK(0, d) je čiara dĺžky d.



Kochova krivka v Java

```
public void kochovaKrivka(int u, double d) {  
    if (u == 0) {  
        this.step(d);  
    } else {  
        this.kochovaKrivka(u-1, d/3);  
        this.turn(-60);  
        this.kochovaKrivka(u-1, d/3);  
        this.turn(120);  
        this.kochovaKrivka(u-1, d/3);  
        this.turn(-60);  
        this.kochovaKrivka(u-1, d/3);  
    }  
}
```

Báza rekurzie
(triviálny prípad)

Rekurzívne volania.
Metóda volá samu
seba.



Rekurzívne metódy

- **Rekurzívna metóda** je metóda, ktorá vo svojej implementácii (priamo alebo nepriamo) **volá samu seba**.
- **Nepriama rekurzia:**
 - **X** volá **Y** a **Y** volá **X**
 - **X** volá **Y**, **Y** volá **Z** a **Z** volá **X**, ...
- **Typická šablóna rekurzívnej metódy:**
 - otestovanie, či nie je **báza rekurzie/triviálny prípad**
 - ak je triviálny prípad, tak sa zrealizujú príslušné príkazy/akcie a vykonávanie metódy končí
 - realizácia **rekurzívnych volaní** „rekurzívny krok“

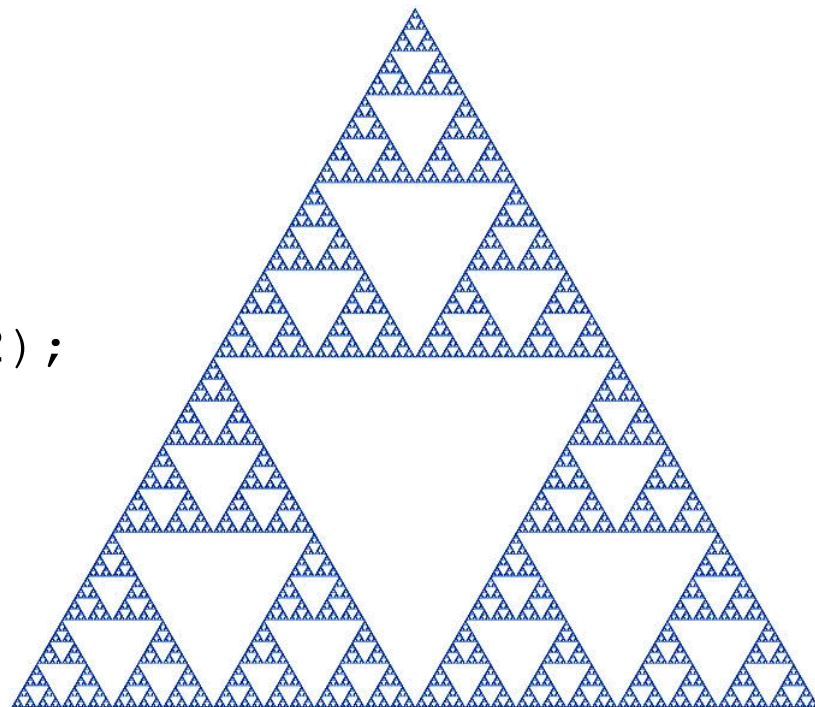


Ďalšie fraktály

- Sierpińského trojuholník:

```
public void sierpinski(int u, double d) {
    if (u == 0) {
        return;
    }

    for (int i=0; i<3; i++) {
        this.sierpinski(u-1, d/2);
        this.step(d);
        this.turn(120);
    }
}
```





Aké parametre sú dobré?

- Testujme rôzne parametre ...



- Pozorovanie:
 - čas kreslenia **výrazne závisí** od parametra **u** - úroveň
 - parameter **d nevplyva** (pozorovateľne) na čas kreslenia

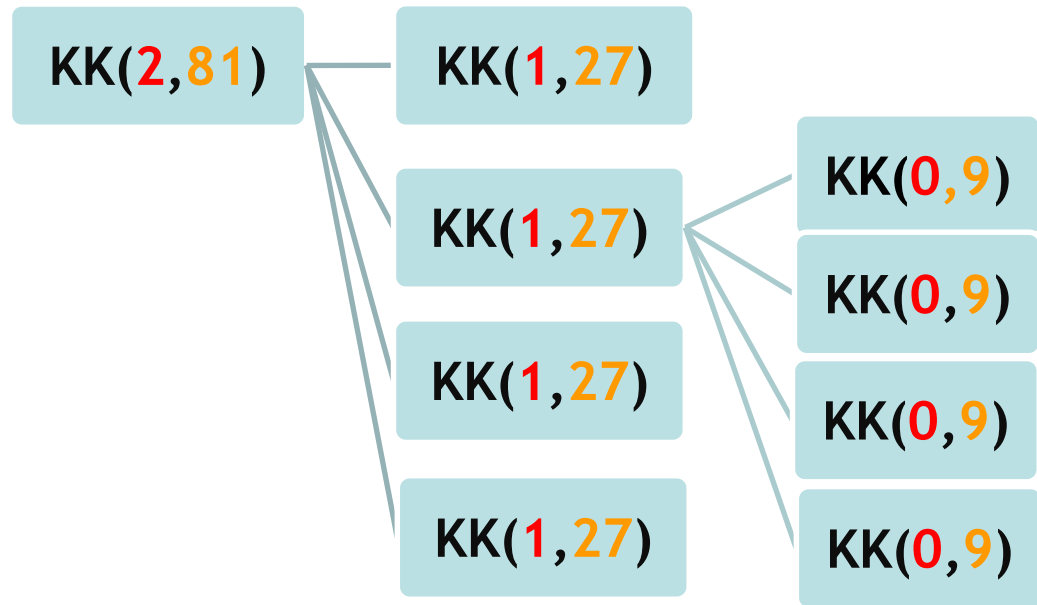


Štruktúra rekurzívnych volaní

```

KK(u, d) {
    KK(u-1, d/3);
    turn(-60)
    KK(u-1, d/3);
    turn(120)
    KK(u-1, d/3);
    turn(-60);
    KK(u-1, d/3);
}

```

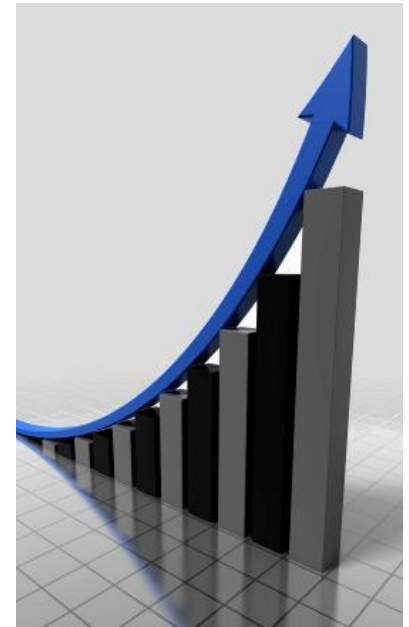


Každé **KK(1, 27)** má za následok
 4 volania **KK(0, 9)**
 celkom $4 \times 4 = 16$ volaní **KK(0, 9)**



Koľko čiar sa nakreslí?

- Čiara sa kreslí, iba keď $u = 0$
- $KK(2, 81)$
 - 16 volaní $KK(0, 9) = 16$ čiar = 4^2 čiar
- $KK(3, 243) = 4$ volania $KK(2, 81)$
 - 4×16 volaní $KK(0, 9) = 64$ čiar = 4^3 čiar
- $KK(4, 729) = 4$ volania $KK(3, 243)$
 - 4×64 volaní $K(0, 9) = 256$ čiar = 4^4 čiar
- $KK(u, d) = 4^u$ čiar



Exponenciálna
závislosť od u



Aké úrovne sú dobré?

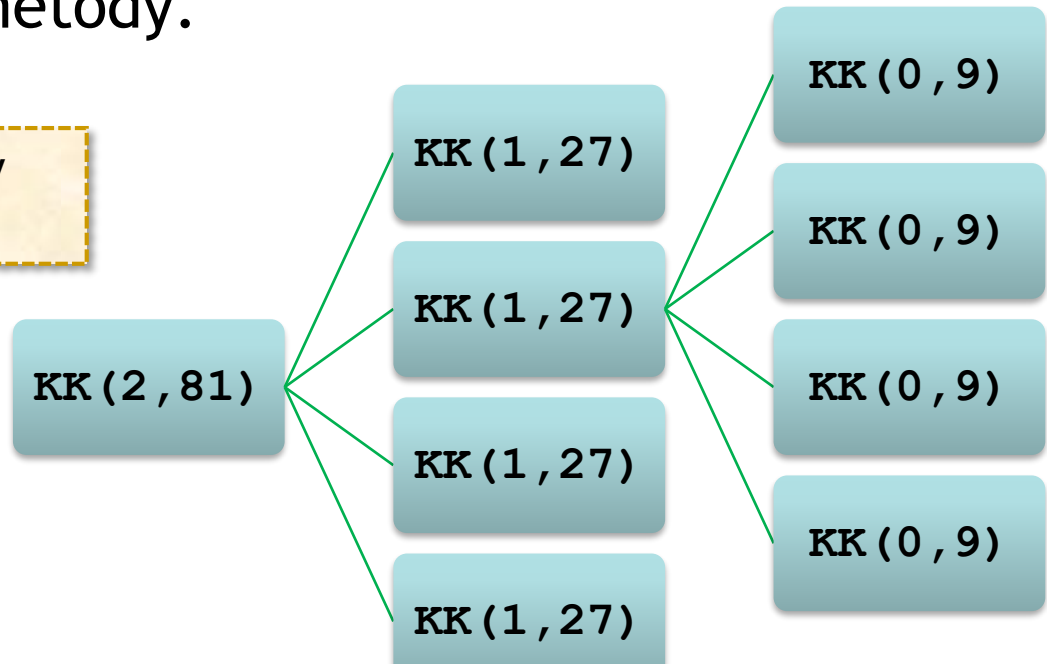
- $KK(4, d) = 256$ čiar
- $KK(20, d) = 1099511627776$ čiar
- $KK(u, d) = 4^u$ čiar
 - na nakreslenie čiary treba aspoň jednu inštrukciu procesora
 - 10 GHz procesor $< 10^{10}$ inštrukcií/čiar za sekundu
- $KK(40, d) = 4^{40}$ čiar $= 16^{20}$ čiar $> 10^{20}$ čiar
 - 10^{20} čiar / 10^{10} čiar za sekundu $= 10^{10}$ sekúnd
 - 1 rok = 31536000 sekúnd \sim tretina z 10^8 sekúnd
 - 10^{10} sekúnd je viac ako 300 rokov



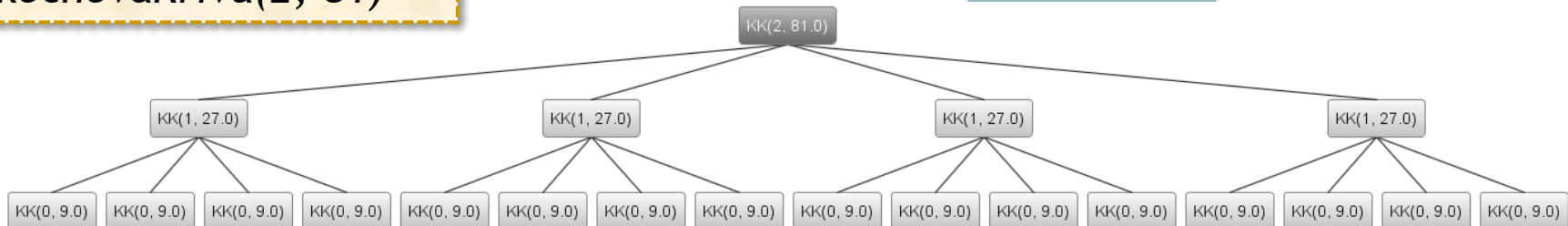
Strom volaní

- Strom volaní** - zakreslenie toho, aké volania metód a s akými hodnotami parametrov sa realizujú pri nejakom konkrétnom volaní metódy.

Časť stromu volaní metódy
kochovaKriva(2, 81)



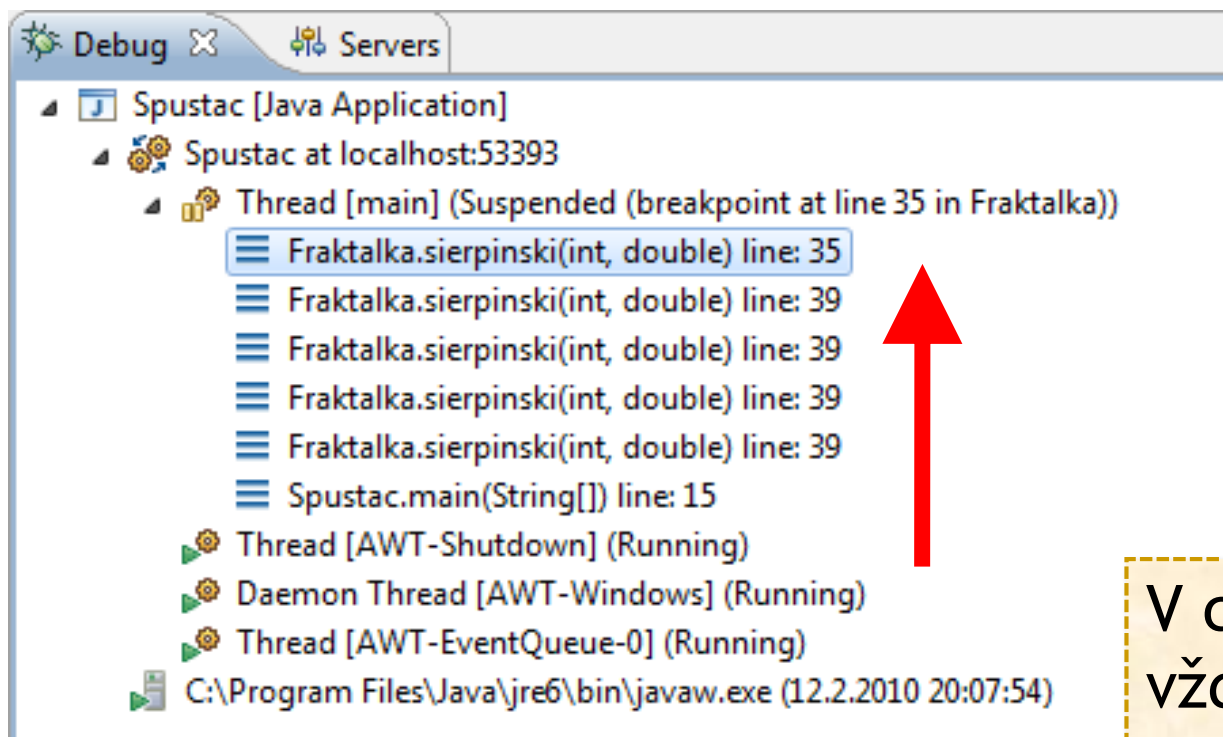
Strom volaní metódy
kochovaKriva(2, 81)





Call stack

- **Call stack** - aktuálna postupnosť vzájomných volaní metód vo vykonávaní (kto koho volal).



V call stack-u je vždy nejaká vetva v strome volaní.



Čo obsahuje *Call Stack*?

- Položkami *Call Stack*-u sú **záznamy o volaniach metód**, ktorých vykonávanie **začalo**, no ešte **nebolo ukončené** (**return**-om alebo **}**)
- Aj keď máme veľa volaní tej istej metódy, každé jedno volanie vytvára **nové lokálne** premenné
 - pozorujme pri debugovaní...
 - každé vykonávanie metódy má svoj vlastný „kontext“, ktorý obsahuje tieto lokálne premenné



Strom volaní a call stack

- Počet úrovní v strome volaní zodpovedá maximálnej výške call stacku.
- Každé **volanie** metódy **pridáva** položku **v call stacku**, návrat z metódy položku odoberá.
- Maximálna výška call stack-u a teda aj **počet rekurzívnych vnorení je obmedzený** pamäťou vyhradenou pre call stack
 - default 320-1024kB, ale záleží od OS a verzie Javy

Exception in thread "main"
java.lang.StackOverflowError

at Fraktalka.sierpinski(Fraktalka.java:36)
at Fraktalka.sierpinski(Fraktalka.java:36)

Ukážka...





StackOverflowError


- Výnimka *StackOverflowError* nastáva vtedy, ak je v call stacku **priveľa otvorených volaní** metód
- V praxi to zvyčajne znamená, že máme rekurziu, ktorá sa „zacyklila“ (nekonečné vnáranie)
 - Neustálym rekurzívnym vnoreniam zabraňuje iba správne naprogramované obslúženie triviálneho prípadu („dna“ rekurzcie)
- Typická chyba pri použití rekurzcie je zabudnuté alebo nesprávne naprogramované **spracovanie bázy rekurzcie** (triviálneho prípadu).



Fraktály trochu inak

- Alternatíva na zastavenie rekurzívnych volaní bez určenia maximálnej úrovne rekurzívneho vnorenia:

```
public void kochovaKrivka(double dlzka) {  
    if (dlzka < 1) {  
        this.step(dlzka);  
        return;  
    }
```



Končíme, keď tvar je už príliš malý na ďalšie kreslenie.

```
    this.kochovaKrivka(dlzka/3); this.turn(-60);  
    this.kochovaKrivka(dlzka/3); this.turn(120);  
    this.kochovaKrivka(dlzka/3); this.turn(-60);  
    this.kochovaKrivka(dlzka/3);  
}
```



Rekurzia v matematike

- Rekurzívne definície sú v matematike časté:
 - **rekurzívne definované** postupnosti
 - **rekurzívne definovateľné** matematické funkcie
- Prečo matematici používajú rekurziu?
 - jednoduchší zápis
 - lepšie zachytenie vlastností pojmu/funkcie
 - ideálne na dokazovanie matematickou indukciou



Statické metódy a premenné

- Statické metódy a premenné:
 - označujú sa kľúčovým slovom **static**
 - **static** = „patriaci triede“
 - statická premenná je **premenná triedy**, všetky objekty danej triedy ju „zdieľajú“
 - statická metóda je **metóda triedy**, **volá sa nad triedou**, nie nad objektom danej triedy
 - môže volať iné statické metódy a používať statické premenné
 - budeme ich používať v niektorých našich malých experimentálnych programčekoch



Faktoriál

- $0! = 1$
- $n! = n * (n-1)!$

```
public static int faktorial(int n) {  
    if (n == 0)  
        return 1;  
    else  
        return n * faktorial(n-1);  
}
```

Báza rekurzie

Rekurzívne volanie



Fibonacciho postupnosť

- $F_0 = 0, F_1 = 1$
- $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

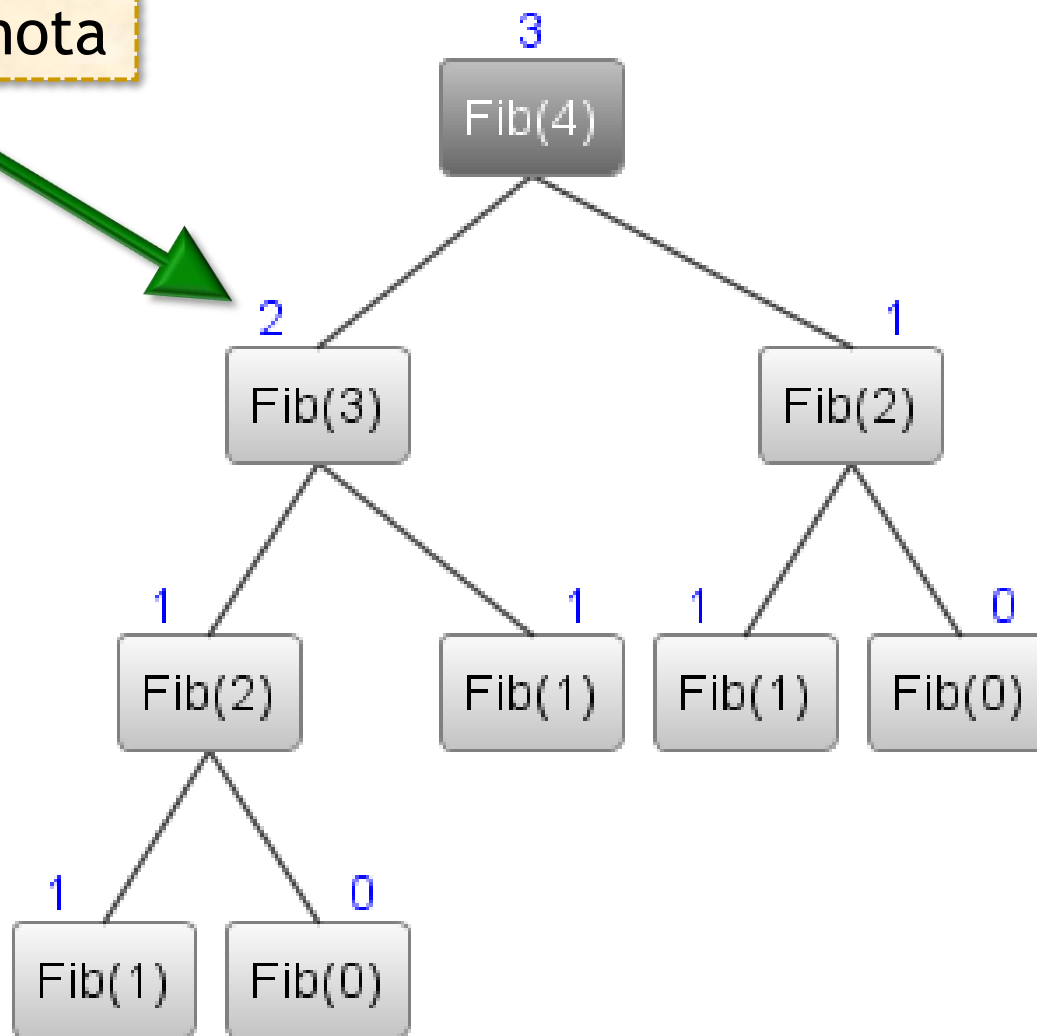
```
public static int fibonacci(int n) {
    if (n == 0)
        return 0;
    if (n == 1)
        return 1;
    return fibonacci(n-1) + fibonacci(n-2);
}
```





Strom volaní Fibonacciho 4

Vrátená hodnota





Rekurzia v algoritmoch

- Rekurzívne riešenie je základný stavebný kameň väčšiny algoritmov.
- Idea:
 - Problém „úrovne u “ chceme **zredukovať** na niekoľko menších problémov „menšej úrovne“
 - zvyčajne „úroveň“ = veľkosť vstupu

Rekurzívny prístup k nájdeniu efektívneho algoritmu
neznamená ešte rekurzívnu implementáciu !!!



Maximum v podpoli

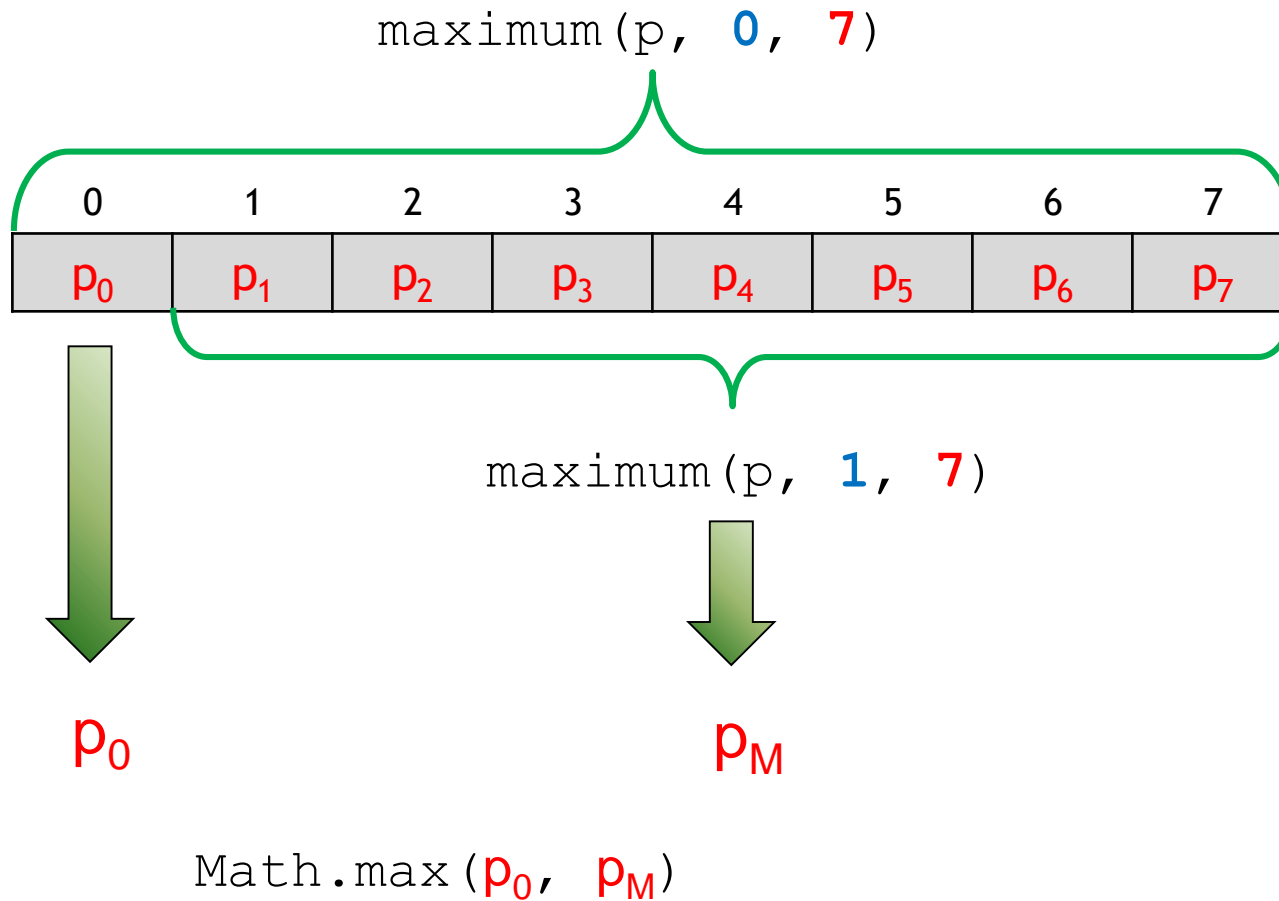
```
public static int maximum(int[] p,  
    int odIdx, int poIdx)
```

- Funkcia má vrátiť maximálnu hodnotu v poli **p** na políčkach s indexami od **odIdx** po **poIdx**
- Maximum z prvých 5 hodnôt v poli:
 - `maximum(p, 0, 4)`
- Maximum v celom poli:
 - `maximum(p, 0, p.length-1)`

*Myšlienková
výzva: Ide to
spraviť bez
použitia cyklov?*

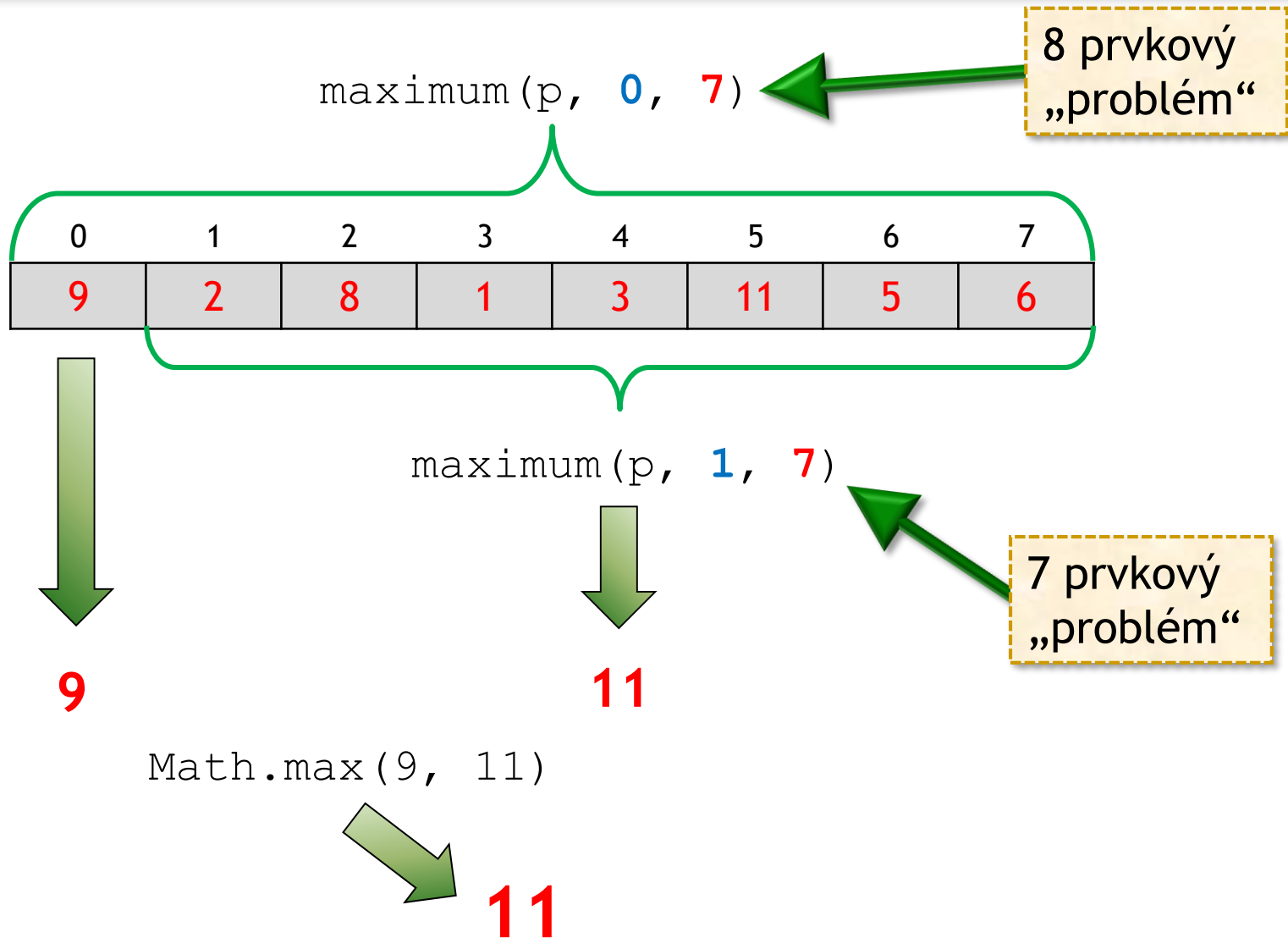


Maximum v poli inak





Maximum v poli inak





Maximum v poli inak

```
public static int maximum(int[] p,  
    int odIdx, int poIdx)
```

- Ak **odIdx = poIdx**, tak maximum je **p[odIdx]**
- Ak **odIdx < poIdx**, tak:
 - zabudneme na prvý prvok **p₀** podpoľa na indexe **odIdx**
 - nájdeme maximum **p_M** vo zvyšnom podpoli **Rekurzia**
 - ako definitívnu odpoveď vrátime väčšie z čísel **p₀** a **p_M**



Maximum v poli inak

```

public static int maximum(int[] p, int odIdx,
    int poIdx) {
    if (odIdx == poIdx)
        return p[odIdx];
    else
        return Math.max(p[odIdx],
            maximum(p, odIdx+1, poIdx));
}

```

Báza rekurzie

Zmenšenie
problému

Rekurzívne volanie

*Na cvičeniach
roanalyzujete toto riešenie
a ukážete si efektívnejšie
riešenie založené na delení
problému na „polovice“*



Čo si treba pamätať

- Pri rekurzii nie je opatrnosti nikdy dost' (pretečenie call stack-u)
- Rekurzia môže byť **výpočtovo** veľmi **drahá**
 - „toto v reálnych programoch neskúšajte, pokiaľ nemusíte“
 - neskôr sa naučíme, kedy je OK a kedy nie
- Rekurzívne riešenie = **rozklad na podproblémy**
- Úvahy o rekurzívnom riešení zvyčajne vedú k efektívnemu nerekurzívnemu riešeniu ...

ak nie sú otázky...

Ďakujem za pozornosť!

